

GEOFYSIKSAMARBEJDET

**Geofysisk Afdeling
Geologisk Institut
Aarhus Universitet**

**LCI-TOLKNING AF GEOELEKTRISKE DATA
- VERIFICERING AF METODEN**

DECEMBER 2002

RESUME

INDLEDNING (1)

ELEKTRISKE METODER (2)	Teoretisk baggrund (2.1)	4
	PACES systemet (2.2)	7
	MEP (2.3).....	9
	Supplerende Litteratur (2.4).....	10

INVERSION (3)	Tolkningsmodel (3.1).....	11
	A priori viden (3.2).....	12
	Ækvivalenser (3.3).....	12
	Dimensionsfejl (3.4).....	12
	AnalyseN (3.5).....	13
	Supplerende litteratur (3.6).....	14

LCI-INVERSION (4)	Samspil mellem bånd og data (4.1)	16
	LCI-Analysen (4.2).....	16
	Bånd - Størrelse og type (4.3)	16
	Tolknings begrænsninger (4.4)	18
	Supplerende litteratur (4.5).....	20

MODELGENKELDELSE (5)	Belysningsmetoder (5.1)	21
	Sammenlignings- kriterier (5.2).....	23
	Resultater (5.3)	26
	LCI og Alm. 1D inversion (5.4).....	28

OPSUMMERING (6)

BILAG 1

RESUME

Nærværende rapport er en afrapportering af et specialearbejde udført af Nikolaj Foged, som blev kandidat fra Aarhus Universitet, Geologiske Institut i november 2001. Det overordnede formål med specialet var at belyse LCI-inversionsmetodens (Lateral Constraints Inversion) styrke og virkemåde ved tolkning af elektriske data.

LCI-inversion er en stykvis 1D-tolkning. I stedet for at sonderingerne langs et profil tolkes enkeltvis, sammenkobles de enkelte sonderinger til nabosonderingerne med laterale bånd. Tolkningsmetoden er bedst egnet, hvor geologien kan antages at varierer "langsomt".

Sammenspillet mellem de laterale bånd og data i inversionsfasen er et centralt punkt i LCI-metoden. Rapporten beskriver dette sammenspil, og der angives vejledende værdier for styrken af de laterale bånd.

Modelvariationsbegrænsninger ved LCI-metoden belyses på en række simple modelsektioner. Det fremstår

klart at, den endimensionale tolkningsmodet er den begrænsende faktor.

Undersøgelsen af LCI-metoden er udført ved at generere syntetiske PACES-data ud fra et meget stort antal stokastiske 2D-modstandssektioner. Undersøgelsen har medført statistiske udsagn om hvor pålidelige LCI-tolkningsresultaterne man kan forvente. Generelt frembringer LCI-metoden tolkningsresultater med tilfredsstillende lighed med udgangsmodellen, indeholdende de overordnede geologiske træk. LCI-metoden sammenlignet med almindelig 1D-tolkning viser, at LCI-metoden resulterer i bedre opløste - og geologisk realistiske modelsektioner.

Undersøgelsen, baseret på de mange tolkninger af de stokastiske modelsektioner, viser bl.a at LCI-metoden kan håndtere relativt kraftige geologiske variationer. Dog er LCI-metoden bedre til at håndtere kraftige modstandsvariationer end kraftige laggrænse variationer.

1 INDLEDNING

Denne rapport er en afrapportering af et specialearbejde udført af Nikolaj Foged, som afsluttede sin kandidatuddannelse i geologi fra Aarhus Universitet i november 2001. Titlen på specialet er "Inversion af laterale sammenbundne modeller af 2-dimensionale stokastiske resistivitetsfordelinger".

Specialet i sin helhed er vedlagt som bilag 1

Det overordnede formål med specialet var at belyse Lateral Constraints Inversion (LCI) metodens styrke og virkemåde ved tolkning af geoelektriske data.

Ved LCI-inversion tolkes data med 1D lateralt sammenkoblede modeller. Inversionsmetoden har fundet stor anvendelse til tolkning af data fra PACES-systemet. Dette skyldes for det første, at den opmålte geologi erfaringsmæssigt kan antages at variere "langsomt", hvilket er i tråd med den éndimensionale tolkningsmodel og de laterale bånd. For det andet skyldes det, de mange og tætsamplede data fra PACES-systemet. Inversion af MEP-data kan også med fordel foretages med LCI-metodikken.

Specialet omhandler primært en analyse af LCI-inversionsmetoden. Specialet havde to formål: For det første at opnå forståelse, af hvordan LCI-inversionsmetoden fungerer. Her tænkes specielt på samspillet mellem de laterale bånd og data i inversionsfasen samt en optimering af de laterale sammenbindinger til inversion af data fra PACES-systemet. For det andet at, belyse hvor gode modelestimerne fra LCI-inversionen er. Dette blev gjort ved at generere syntetiske

PACES-data fra stokastiske 2D-modstandssektioner (forwardsektion). De syntetiske data blev herefter behandlet og inverteret som felldata. På baggrund af en række opstillede kriterier blev ligheden mellem forwardsektionen og LCI-inversionsresultater vurderet.

Specialet har i væsentlig grad bidraget til en forståelse og udvikling af LCI-metoden. Specialet har bl.a. resulteret i retningslinier for størrelser og typer af de laterale bånd. Endvidere har studiet af en stor mængde modelsektioner resulteret i statistiske udsagn om, hvor pålidelige LCI-inversionsresultaterne er.

RAPPORTEN

I denne rapport præsenteres først og fremmest resultaterne af de mange modelleringer.

Der redegøres kort for fysikken bag DC-metoden samt PACES- og MEP-metoden. Afsnit 3 omhandler generelle forhold vedrørende inversion af geofysiske data, mens afsnit 4 gennemgår LCI-metodikken - opsætning, tolkningsbegrænsninger mm.

I afsnit 5 præsenteres tolkningsresultaterne af de stokastiske modstandssektioner.

Rapporten er skrevet af cand. scient Nikolaj Foged og redigeret af Ph.D. Esben Auken. Ba. Lone Davidsen har læst den sproglige og grammatiske korrektur.

Århus december, 2002

Nikolaj Foged, GeoFysikSamarbejdet.

2 ELEKTRISKE METODER

Elektriske metoder til modstandskortlægning har i de sidste årtier vundet stor udbredelse i Danmark. Metoderne anvendes især til råstofkortlægning, sårbarhedsundersøgelser af

grundvandsmagasinerne samt generelle miljøundersøgelser. I det følgende afsnit vil de elektriske metoders virkemåde blive gennemgået.

2.1 TEORETISK BAGGRUND

Med elektriske metoder kortlægges den elektriske modstand i undergrunden. Efter som forskellige geologiske formationer har forskellig modstand, kan man, med kendskab til modstandsfordelingen i undergrunden, typisk skelne mellem ler og sand, mellem umættet og mættet sediment og endelig mellem salt og fersk porevand. Muligheden for at skelne mellem de ovennævnte typer kan blandt andet bidrage til viden om, hvor der er vand (umættet/mættet), afgrænsning af grundvandsmagasiner (ler/sand), hvor godt grundvandsmagasinet er beskyttet (ler/sand) og saltvandsindtrængning i grundvandsmagasiner (fersk/salt).

ELEKTRISK MODSTAND

Den specifikke elektriske modstand (resistiviteten) med enheden Ωm defineres som modstanden af en $1 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$ terning.

Geologiske formationer kan normalt inddeles i tre komponenter: luft, væske og matrix, som alle bidrager til formationsmodstanden. Som hovedregel er det mængden af porevand - bestemt af porøsiteten og mætningsgraden - samt indholdet af lermineraller, der er afgørende for formationsmodstanden.

Vand er i sig selv ikke en god elektrisk leder, men porevandet indeholder ofte en stor mængde ioner, der gør det til en god leder. Archie opstillede følgende empiriske sammenhænge

mellem formationsmodstanden ρ_f , formationsfaktoren F , porevandsmodstanden ρ_w , porøsiteten ϕ og vandmætningen S_w ,

$$\rho_o = F\rho_w \quad (2.1)$$

$$F = a\phi^{-m} \quad (2.2)$$

$$S_w = \left(\frac{\rho_o}{\rho_f}\right)^{1/n} \quad (2.3)$$

hvor ρ_o angiver formationsmodstanden ved 100% vandmætning. Konstanterne a , m og n afhænger af formationstypen. Som tilnærmelse for konstanterne benyttes ofte $a=1$, $m=2$ og $n=2$.

Archies love er kun gyldige i det tilfælde, hvor ledning af den elektriske strøm i sedimentet udelukkende foregår gennem porevandet - ensbetydende med lerfrie sedimenter.

I Tabel 2.1 ses modstanden i nogle typiske danske sedimenter. Som det fremgår af tabellen, er der ikke entydig sammenhæng mellem modstand og litologi. Inden for et område har porevandet tilnærmelsesvis samme ledningsegenskaber. I et lokalt område er det således oftest muligt at knytte litologi og modstand sammen. Boringer i undersøgelsesområdet kan endvidere hjælpe med til at knytte en modstand og litologi/formation sammen.

GEOFYSIKSAMARBEJDET

Type	Aflejringsperiode	Modstand [Ωm]
Moræneler	Kvartær	30 - 70
Sand over GVS	Kvartær	> 200
Smeltevandsler	Kvartær	10 - 30
Sand under GVS	Kvartær/Tertiær	60 - 200
Glimmerler	Tertiær/Miocæn	10 - 30
Glimmerler	Tertiær/Oligocæn	4 - 9
Søvindmergel	Tertiær	4 - 12
Plastisk ler	Tertiær/Eocæn	2.5 - 4
Kalk over GVS	Danien	1-200
Kalk under GVS	Danien	>200

Tabel 2.1 Modstanden af typiske danske Kvartære og Tertiære aflejringer. Modstands-værdierne stammer fra målinger i borehul, boreprøve og geoelektriske målinger. Efter Auken, E. et al. 2000.

PRINCIP FOR DC-MÅLINGER

Som omtalt kan kendskab til modstandsfordelingen i undergrunden være af stor værdi. Information om modstandsfordelingen kan indhentes ved brug af induktive og elektriske metoder.

Fælles for de elektriske metoder er, at de benytter en 4-polsopstilling - to strømmelektroder (A og B) og to potentialelektroder (N og M).

Potentialet fra en punktkilde på overfladen af et homogent, isotropt halvrum i afstanden r er givet ved,

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (2.4)$$

hvor I er den strøm, der sendes ud i jorden, og $2\pi r^2$ er arealet af halvkuglen, som strømmen "stråler ud gennem". Potentialeforskellen over de to potentialelektroder (ΔV) for en vilkårlig 4-polsopstilling, kan da vises at være,

$$\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \quad (2.5)$$

hvor for eksempel AM er afstanden mellem strømmelektroden A og poten-

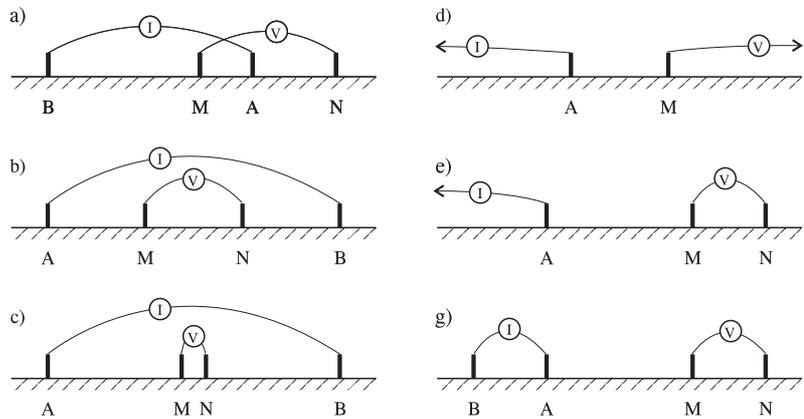
tialelektroden M. Det målte potentiale omregnes normalt til tilsyneladende modstand (ρ_a). Omregningen sker på følgende måde:

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{\Delta V}{I} 2\pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right)^{-1} \\ &= \frac{\Delta V}{I} K \quad (2.6) \end{aligned}$$

Den tilsyneladende modstand afhænger altså af det målte potentiale (ΔV), den udsendte strøm (I) og opstillingens geometri udtrykt ved den geometriske faktor (K). For et homogent halvrum er den tilsyneladende modstand lig med halvrumsmodstanden.

SKALERING

Evnen til skelne mellem jordlag afhænger af modstandskontrasten mellem lagene samt lagenes tykkelse. Geoelektriske sonderinger skalerer relativt i lagenes modstande og tykkelser. Det vil sige, at det er den relative forskel mellem lagmodstandene, der bestemmer forløbet af ρ_a -kurven og dermed, hvor godt den pågældende model kan opløses. En geoelektrisk sondering skelner altså lige så godt mellem lag med en kontrast på 1-10 Ωm som mellem lag med en kontrast på 50-500 Ωm .



Figur 2.1 Elektrodekonfigurationer. a: Generel opstilling. b: Wenner. c: Schlumberger. d: Pol-pol e: Pol-dipol. g: Dipol-dipol.

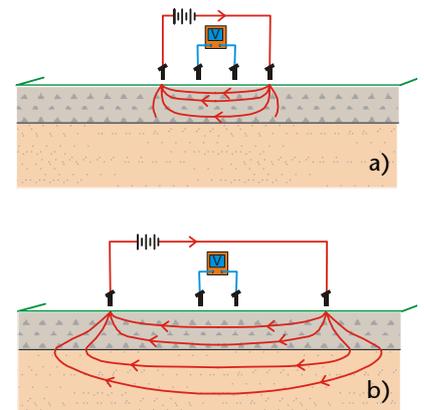
KONFIGURATION

De mest almindelige målekonfigurationer for de geoelektriske metoder er Wenner, Schlumberger, pol-pol, pol-dipol, og dipol-dipol, (se figur 2.1).

Ved MEP-udlæg anvendes traditionelt Wenner-, og Schlumberger-konfigurationer, mens PACES-systemet indeholder både Wenner og dipol-dipol konfigurationer. Pol-dipol, og dipol-dipol konfigurationer benyttes ofte ved IP-målinger¹.

INDTRÆNGNINGSDYBDE

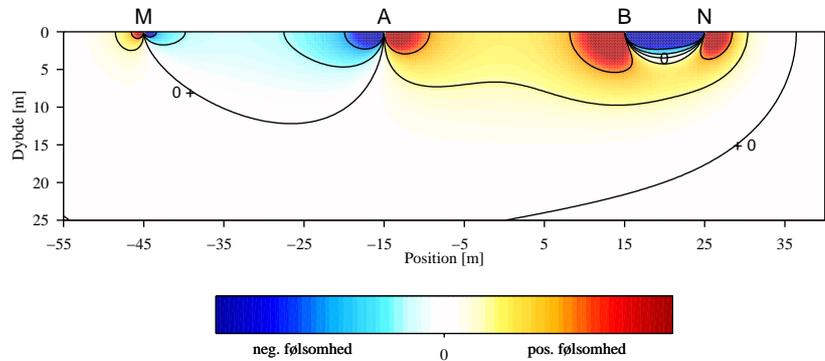
Indtrængningsdybden for de geoelektriske metoder afhænger i høj grad af geometrien i opstillingen samt jordmodellen. Generelt vil en større afstand mellem strøm- og potentialelektroderne resultere i en større indtrængningsdybde, som illustreret i figur 2.2.



Figur 2.2 Indtrængningsdybden øges med stigende elektrodeafstand. I a) løber hovedparten af strømmen i det øverste lag mens strømmen i b) er trængt længere ned i jorden, som følge af øget elektrodeafstand.

1. IP: Induced Polarization. Tidsseriemåling af hvordan potentialet opbygges/henfaldet i jorden ved påførelse af en elektrisk spænding.

På et homogent halvrum kan man beregne, hvor en given konfiguration har sin følsomhed. Denne funktion benævnes Frechetkernen.



Figur 2.3 Frechet kernen for en 4-polsopstilling på et homogent halvrum med strømmelektroderne (A og B) i -15 og 15 og potentialelektroderne (M og N) i -45 og 25 m.

På figur 2.3 ses et plot af Frechetkernen for en tilfældig 4-polsopstilling. Som det fremgår af figuren, er følsomheden ikke specielt fokuseret. Nogle områder bidrager endda med negative værdier til det samlede potentiale - derfor negativ følsomhed.

For Wenner opstillinger skalerer følsomheden i afstanden mellem elektroderne (a-afstanden). Ud fra kendskab til Frechetkernen kan der opstilles en række tommelfingerregler: For Wenner-opstillinger vil den målte tilsyneladende modstand primært være et udtryk for en midling af modstanden i dybdeintervallet 0,1 til 0,75 gange a-afstanden med hovedvægt på modstanden i dybden 0,3 gange a-afstanden. Tilsvarende for en Schlumberger-opstilling vil den tilsy-

neladende modstand være en midling af modstanden i dybdeintervallet 0,1 til 0,5 gange L/2-afstanden med størst vægt på modstanden i dybden 0,25 gange L/2.

LATERAL FØLSOMHED.

Konfigurationens laterale følsomhed dækker som vist i figur 2.3 over et bredt område. Således er der væsentlig følsomhed længere ude end de to yderelektroder. Da den største følsomhed ligger ved de to tætstående elektroder (B og N), tilskrives denne konfiguration sit laterale fokuspunkt (position) mellem elektrode B og N. For de symmetriske Wenner- og Schlumberger-konfigurationer er det laterale fokuspunkt i midten af konfigurationerne.

2.2 PACES SYSTEMET

Ønsket om en mere rationel dataindsamling førte til udviklingen af et slæbegeoelektrisk udstyr. I starten af 90'erne blev introduceret et 3-kanals slæbegeoelektrisk udstyr (PACEP, Pulsed Array Continuous Electrical Profiling), bestående af Wenner-

konfigurationer med a-afstande på 5-30 m. Udstyret er i de senere år udbygget til et 8-kanals slæbe (PACES), men bygger stadig på de samme principper med strømudsendelse fra elektroder, der slæbes hen over jorden af et bæltekøretøj.

På figur 2.4 ses en principskitse af PACES-udstyret. Udstyret består i dag af et dieseldrevet bæltekøretøj med måleinstrument og datalogger samt et ca. 100 m langt elektrodearray. Udstyret betjenes af to personer, som kan udføre 10-15 km profil pr. dag afhængig af terrænet. Køretøjet er fuldt terrængående, og med 2 køre-ramper er det muligt at krydse små bække og diger. Elektrodearrayet er forsynet med to strømelektroder, 11 potentialelektroder samt en jordelektrode. For at opnå god jordkontakt, som er essentiel for datakvaliteten, er vægten af elektroderne oppe på ca. 10 kg pr. styk. De 11 potentialelektroder kombineres sådan, at der opnås otte målekonfigurationer. Konfigurationerne, der benyttes, er Wenner- og dipol-dipol-lignende konfigurationer. Elektroderne er placeret således, at følsomheden for de otte konfigurationer er fordelt nogenlunde jævnt med dybden. Med en 30 m Wenner konfiguration som den største elektrodeafstand indhentes med PACES systemet oplysninger om modstandsforholdene i de øverste 25-30 m af lagpakken.

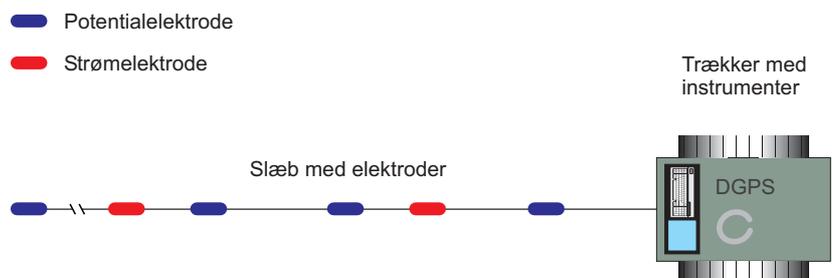
Der måles kontinuert under kørslen, hvilket til tider kan give problemer med kontakten til jorden. Strømodsendelsen styres automatisk således, at der opnås det bedste signal-støjforhold, dog med en maksimal strømodsendelse på 30 mA. Detekteringen foregår synkront for de 8 kanaler med

80 målinger pr. sekund pr. kanal. Data filtreres prædiktivt i tid og samples med ca. 1,4 m mellemrum styret af et tichjul påspændt trækkøretøjet. De relativt lave spændinger, der registreres over potentialelektroderne, gør det er nødvendigt at forstærke målesignalet. Sammenholdt med den til tider er manglende galvaniske kontakt med jorden samt slæbestøj, synes dette umiddelbart at måtte resultere i meget støjfyldte data. Dette kan den adaptive prædiktive filtrering samt den efterfølgende midling af de mange og tætte målinger dog fuldt ud kompensere for. Støjmæssigt kan data fra PACES-udstyret sidestilles med jordspydsmetoder, og som standard antages støjniveauet på data at være 3-5%. Støjen dækker både geologisk støj², slæbestøj samt instrumentstøj.

Data filtreres og midles normalt yderligere, inden de inverteres til en modstandsmodel. Dette gøres primært for at undertrykke støjen. Midlingen af data foretages med et boxfilter³. Midlingsbredden af filteret afspejler de

2. Geologisk støj: De udsving i data, der skyldes inhomogene lag, samt afvigelser fra den endimensionale model. (se evt. kapitel 3.4)

3. Boxfilter: Alle data i et givent interval vægtes lige meget.



Figur 2.4 PACES-udstyret. Trækker med måleinstrumenter og elektrodeslæbet.

enkelte målekonfigurationers laterale følsomhed.

Oftest foretages der en 1D-inversion med laterale bånd på modelparametrene - såkaldt LCI-inversion. Midlingen af data, sammenholdt med overlappet i konfigurationernes laterale følsomhed, gør, at to på hinanden følgende sonderinger har en endog meget stor fælles information. Man kan således nøjes med at invertere data med en sonderingstæthed på 5-10 m uden at miste væsentlig information.

Modstandsmodellerne fra inversionen præsenteres som modstandsprofiler og middelmodstandskort.

PACES metodens styrke ligger i pålidelige 2-3-lagsmodeller af de øverste 25-30 m af lagpakken. Sådanne informationer har blandt andet stor værdi med hensyn til sårbarhedsvurdering af grundvandsreservoirerne. Endvidere kan informationer fra PACES-metoden suppleret med informationer fra konventionelle TEM40⁴ resultater i en velopløst modstandsmodel.

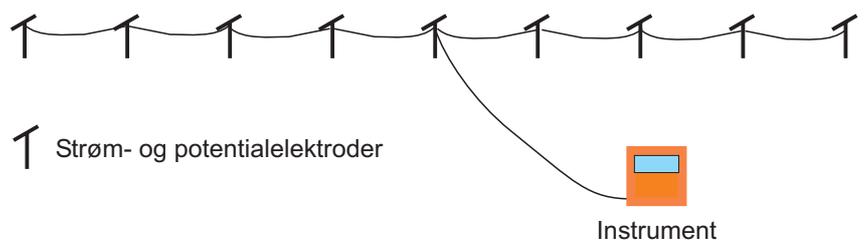
4. Transient ElektroMagnetisk: Sonderingsmetode i central-loop konfiguration med 40x40 meter sender-loop. Metoden er meget sensitiv overfor dybden til et lavmodstandslag.

2.3 MEP

Multi-Elektrode-Profilering (MEP) er en videreudvikling af traditionel geoelektrik, hvor der arbejdes med fire elektrodespyd. Når der måles med MEP, sættes en række spyd langs profilinien, og spyddene forbindes til et kabel med mange kanaler som vist i figur 2.5. Ved hjælp af et måleinstrument med indbygget computer er det herefter muligt at skifte mellem et forudbestemt antal måleopstillinger langs det udlagte kabel. Afstanden mellem spyddene afhænger af opgavens karakter. En typisk måleopstilling til grundvandsopgaver er 400 m lang, og der måles med elektrode-opstillin-

ger i Wenner-konfiguration med afstande fra 5 til 120 m. Med en sådan måleopstilling indhentes der information om modstandsforholdene ned til ca. 60 m dybde afhængig af modstandsforholdene. Ønskes en mere detaljeret opløsning af de øvre lag vælges, en mindre elektrodeafstand.

Feltarbejdet kan normalt udføres af to personer, som til fods flytter og betjener udstyret. Pr. dag kan udføres ca. 1 km. profil afhængig af udlæggets konfiguration. Data inverteres ved en 1D LCI-inversion eller ved en fuld 2D-



Figur 2.5 MEP-udlæg: Jordspyddene anvendes både som potentiale- og strømelektroder styret af måleinstrumentet.

inversion. Inversionsresultaterne præsenteres normalt som profilsnit. Hvis undersøgelsen er planlagt således, at der er flere parallelle eller krydsende linier, kan der opnås en form for 3-

dimensional (3D) visualisering af de elektriske modstande. Andre præsentationsmåder er fladedækkende kort med gennemsnitlige modstande i dybdeintervaller.

2.4 SUPPLERENDE LITTERATUR

Foged, N., Inversion med lateralt sammenbundne modeller af 2-dimensionale stokastiske resistivitetsfordelinger, 2001, speciale afhandling, Aarhus Universitet, Geologisk Institut (Bilag 1). Kapitel 2 og 3 i speciale afhandlingen

Auken, E., Sørensen, K., Søndergaard, V. H., og Sørensen, B.. Geofysik og grundvandskortlægning. 1, 1-111. 2000. GeoFysikSamarbejdet.

GeoFysikSamarbejdets hjemmeside: www.gfs.au.dk

3 INVERSION

I geofysisk sammenhæng betegner inversion den proces, der omsætter de målte data til en geofysisk model.

3.1 TOLKNINGSMODEL

Ved inversion af geoelektriske data, og geofysiske målinger i det hele taget, anvendes en geofysisk tolkningsmodel. For de elektriske metoder beskriver den geofysiske model modstandsfordelingen i jorden. Modstandsmodellen, der anvendes ved inversionen, kan opstilles i 1-3 dimensioner. En 1D modstandsmodel vil bestå af homogene planparallelle lag med uendelig udstrækning i x,y-planet. En 2D-model består af rektangulære kasser eller trekanter med uendelig udstrækning i y-planet. Ved inversion med en 2D-tolkningsmodel tages der således højde for konfigurationernes laterale følsomhed. En 3D-tolkningsmodel består af kuber eller tetraeder fordelt i rummet.

Modstandsfordelingen i jorden vil altid være mere kompleks, end den model man vælger at beskrive den med. Inversionsresultatet vil således repræsentere middelmodstand for et givet lag/område.

I valg af dimension for tolkningsmodellen, bør en række forhold overvejes:

- Metodens opløsningsevne: Opløsning af tynde lag i stor dybde med elektriske metoder er f.eks ikke muligt, da metoden midler over store jordvolumener i dybden.
- Den forventede geologi: Forventes de geologiske variationer at

være meget kraftige, vil det være nødvendigt at beskrive geologien med en 2D eller 3D-tolkningsmodel. Kan variationerne antages at være "langsomme" vil en stykvis 1D-tolkningsmodel kunne beskrive variationerne.

- Datadækning: Datatætheden skal harmonere med detaljeringsgraden i ens model. Man skal f.eks helst have flere datapunkter end antallet af modelparametre, man ønsker at bestemme i ens model.
- Ønskes detaljeringsgrad: Da den geofysiske model oftest skal bruges til opstilling af en hydrogeologisk model, er det de overordnede geologiske træk der skal udtrages af modellen. En meget detaljeret geofysisk model er ikke specielt egnet til dette.
- Matematisk beskrivelse: Inversion med en model i en højere dimension komplicerer invertsproblemet.
- Regnetid: Regnetiden forøges væsentligt, hvis dimensionen øges - fra få minutter til dage hvis der vælges hhv. en 1D og en 3D tolkningsmodel.

1D-tolkningsmodeller er traditionelt blevet anvendt til inversion af elektriske data. 2D-inversion af MEP-data bliver dog rutinemæssigt anvendt.

3.2 A PRIORI VIDEN

I nogle tilfælde har man viden om modstandsfordelingen i undersøgelsesområdet fra anden side end data. Det kunne f.eks. være modstandsværdier fra en ellogboring. Denne viden (a priorividen) kan inddrages i inversionen sammen med data. Konkret ind-

føres a priori viden som en given værdi på en af modelparametrene med en given usikkerhed. Desto mindre usikkerheden er på en a priori værdi, desto større vægtes værdien i forhold til data i inversionen.

3.3 ÆKVIVALENSER

Data vil altid være behæftet med en vis usikkerhed og vil således, ud over en måleværdi, indeholde et skøn over usikkerheden herpå. I inversionsfasen medfører dette, at flere forskellige modeller kan tilpasse data inden for datausikkerheden, hvilket giver ækvivalensproblemer. For inversion med en 1D tolkningsmodel er ækvivalens-typerne for DC-sonderinger følgende:

- Højmodstandsækvivalens: Optræder, når højmodstandslag ligger imellem lag med lavere modstand. Kun produktet af tykkelse og modstand kan bestemmes for det pågældende højmod-

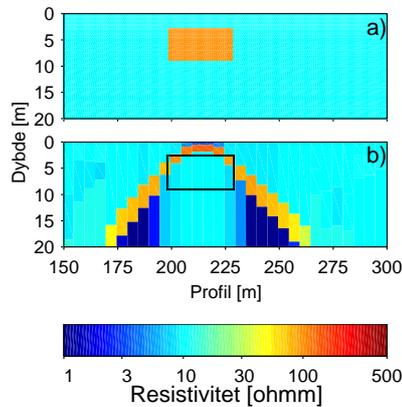
standslag. Højmodstandslaget træder ud af ækvivalensen, når det når en vis tykkelse.

- Lavmodstandsækvivalens: Optræder, når lavmodstandslag ligger imellem lag med højere modstand. Kun forholdet mellem tykkelse og modstand kan bestemmes. Lavmodstandslaget træder ud af ækvivalensen, når det når en vis tykkelse.
- Lagundertrykkelse: Optræder, når enkelte lag er så tynde, at de ikke giver væsentligt udsving i ρ_a -kurven. Disse lag kan derfor ikke detekteres i inversionen.

3.4 DIMENSIONSFEJL

En anden type tolkningsfejl opstår som følge af, at data ikke opfylder de forudsætninger, der antages under inversionen - de såkaldte dimensionsproblemer. Slæbegeoelektriske data tolkes ofte med en stykvis éndimensionel model, under forudsætning af homogene, isotrope og planparallelle lag - forhold som aldrig opfyldes helt.

I figur 3.1 ses effekter fra en stykvis 1D-tolkning af en udpræget 2D-modelsektion. De skrå "faner", også kaldet bukseben, ud fra kassen i inversionsresultatet skyldes, at sonderingerne ved siden af kassen er påvirket af kassens lavere modstand. Det fejlagtige lavmodstandslag placeres i en stadig større dybde væk fra kassen, idet afstanden til kassen bliver større.



Figur 3.1 Inversion af syntetiske PACES-data. a) Forwardsektion med 10 Ωm kasse i et 100 Ωm halvrum. b) Inversionsresultat - sammensatte 1D-tolkninger.

3.5 ANALYSEN

Ud over modellestimatet (m_{est}) er det også muligt at beregne en usikkerhed på bestemmelsen af de enkelte modelparametre - kaldet modelparameteranalysen. Usikkerhederne bestemmes populært sagt ved at beregne, hvor meget forwarddata⁵ ændre sig når modelparametrene ændres en for en. Medføre modelændringen en lille ændring i forwarddata er den pågældende modelparameter "dårligt bestemt" - idet den kan antage værdier i et bredt interval uden at påvirke forwarddata og dermed datatilpasningen. Er effekten af modelændringen derimod stor, er modelparameteren "godt" bestemt. Da inversion forgår på logaritmen til

modelparametrene, vil usikkerheden typisk være angivet som en faktor.

Usikkerhederne er et statistisk udsagn der siger, at det er 67 % sandsynligt at modelparameteren ligger indenfor et interval fra parameteren ganget med usikkerheden til parameteren divideret med usikkerheden.

Analysen er beregnet under forudsætning af, at der er en lineær sammenhæng mellem data og model, et forhold som kun tilnærmelsesvis er gældende. Analysen bør derfor kun bruges som indikator for, hvor godt en modelparameter er bestemt, således at en modelparameter betegnes som bestemt, hvis usikkerheden ligger i intervallet 1-1,3, nogenlunde bestemt mellem 1,3-1,5, dårlig bestemt mellem 1,5-2 og ubestemt >2.

5. Forwarddata; dataresponsen fra den pågældende geofysiske model

3.6

SUPPLERENDE LITTERATUR

Foged, N., Inversion med lateralt sammenbundne modeller af 2-dimensionale stokastiske resistivitetsfordelinger, 2001, speciale afhandling, Aarhus Universitet, Geologisk Institut (Bilag 1). Kapitel 4 i speciale afhandlingen gennemgår kort inversions teorien der ligger bag tolkningen af geofysiskedata, mens kapitel 6 omhandler mere specifikke forhold vedr. LCI-metoden.

Auken, E., Sørensen, K., Søndergaard, V. H., og Sørensen, B.. Geofysik og grundvandskortlægning. 1, 1-111. 2000. GeoFysikSamarbejdet.

Menke, W., 1989, Geophysical data analysis discrete inverse theory: Academic Press, San Diego.

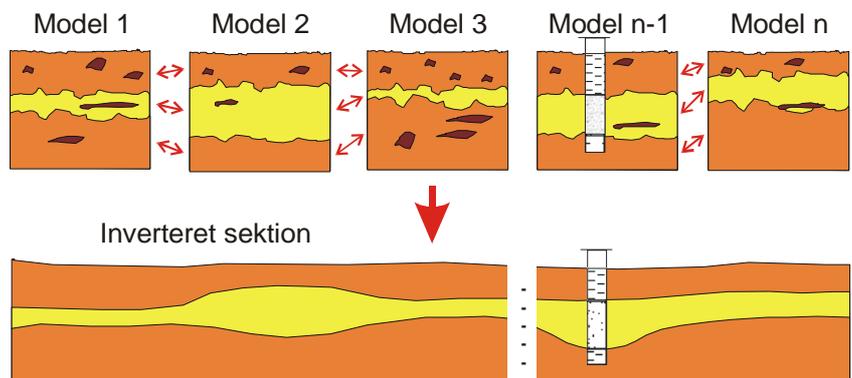
4
LCI-INVERSION

LCI-inversion er en stykvis 1D-inversion. I stedet for at sonderingerne langs et profil tolkes enkeltvis, sammenkobles de enkelte sonderinger til nabosonderingerne med laterale bånd. Hele ligningssystemet med alle de sammenbundne sonderinger inverteres på én gang. Tolkingsmodellen består således af en række 1D-modeller, alle med samme antal lag.

Som følge af sammenbindingerne opnås ved LCI-inversion glatte modelsektioner indeholdende hovedtrækene af den underliggende geologi som illustreret i figur 4.1.

LCI-formuleringen er kun egnet, hvor de laterale geologiske variationer er "langsomme". Dette skyldes, dels at man med de laterale bånd begrænser variationer på to på hinanden følgende modeller, dels at tolkningsmodellen stadig er en éndimensional model med antagelser om stykvis planparallelle, homogene lag.

I Danmark består den øvre del af lagpakken primært af kvartære aflejringer. På et overordnet plan kan de laterale variationer erfaringsmæssigt antages at være langsomme. Det er således fornuftigt at benytte LCI-formuleringen til tolkning af geofysiske data, som indeholder information om den øvre del af den danske lagpakke.



Figur 4.1 Lateral sammenbinding af modeller ved LCI-inversion. Ved en LCI-tolkning opnås glatte modelsektioner, der indeholder de væsentligste træk af den underliggende geologi.

4.1 SAMSPIL MELLEM BÅND OG DATA

I inversionen angives styrken af de laterale bånd for hver enkelt modelparameter. Et bånd på 1,1 på modstanden i 1. lag (ρ_1) vi betyde, at modstanden i 1. lag i nabomodellen må variere med en faktor 1,1 i forhold til ρ_1 . Denne begrænsning i variation er den information, båndene tilfører inversionsproblemet. I inversion indgår også data, og det er samspillet mellem de laterale bånd og data, der afgør, hvad variationen modellerne imellem bliver. Man kan således sagtens komme i den situation, at variationerne i en modelsektion er større end, hvad båndene "tillader".

Studier af modelopløselighedsmatricer⁶ har vist, at de laterale båndes indflydelse falder, når data alene opløser modellen godt, og omvendt, hvilket er et ønskeligt forhold. De laterale båndes tilstedeværelse skal ses dels som a priori viden om de geologiske

variationer, dels som ønsket om glatte sammenhængende modelsektioner.

Med indførelse af laterale bånd reduceres antallet af mulige modelresultater kraftigt - fra at nabomodellen kan antage vilkårlige værdier til kun at kunne variere inden for et vist interval. Der tilføres således mere information til hver enkelt sondering, hvilket medfører bedre opløsning af modelsektionen og bestemmelse af modelparametrene. Således reduceres ækvivalenstildæknene ved LCI-inversion i forhold til almindelig 1D inversion.

6. Modelopløselighedsmatricen vidner om, hvilke data og bånd der har bidraget til bestemmelsen af den pågældende parameter, samt med hvilket vægt. Længere gennemgang, se specialeafhandlingen afsnit 8.1 (bilag 1).

4.2 LCI-ANALYSEN

Som følge af den tilførte information fra de laterale bånd bliver usikkerhederne på de enkelte modelparametre mindre. Analysen fra LCI-inversion skal dog bruges varsomt, dels fordi information fra båndene ikke altid er korrekt, dels pga. den omtalte ikkeli-

niære sammenhæng mellem model og data. Analysen fra LCI-inversionen bør derfor kun bruges som indikator for, hvilke modelparametre der er bestemt (ca. 1-1,2), hvilke der er dårligt bestemt (ca. 1.2-1.5), samt hvilke der er ubestemt (>1,5).

4.3 BÅND - STØRRELSE OG TYPE

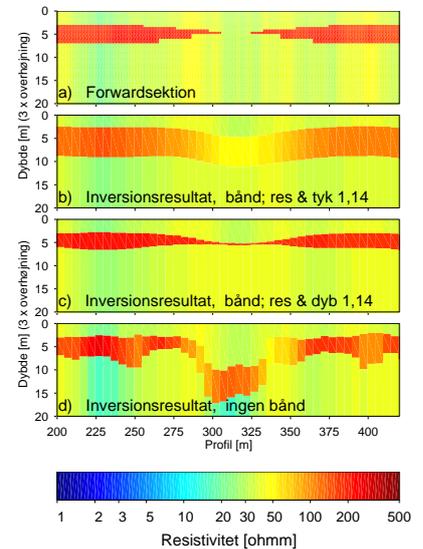
Optimalt set skal de laterale bånd afspejle de faktiske geologiske variationer. Derved vil man få indført maksimal information om variationerne af modelparametrene, og ens model-estimat vil alt andet lige blive bedre. Problemet er, at de faktiske variationer ikke kendes, og at de ikke er ensartede. For at finde generelle indstillinger af de laterale bånd samt undersøge, hvor kritisk størrelse er for

inversionsresultatet, er der udført en række tolkningsforsøg på syntetiske data. Disse undersøgelser er udført ved, at der er genereret 2D-syntetiske data for PACES-systemet. De syntetiske data er herefter inverteret med forskellige indstillinger af de laterale bånd, og sammenligning med udgangsmodellen (forwardsektionen) er fortaget.

I modelsektioner, som data alene opløser godt, har de laterale bånd kun en relativt lille indflydelse på modelestimatet. Indstillingerne af de laterale bånd er derfor fundet ud fra modelsektioner, hvor de laterale bånd vitterligt har indflydelse på inversionsresultatet. I figur 4.2 a ses et eksempel på en sektion, der blev anvendt til at optimere de laterale bånd. Modelsektionen kunne repræsentere et sandlegeme, der tynder ud og forsvinder helt i et morælerlag - et ikke utænkeligt scenaria i den øvre danske kvartære lagpakke. Sektionen indeholder en række ting, der gør, at de laterale bånd får indflydelse på inversionsresultatet. I siderne i modelsektionen er modellerne højmodstands-ækvivalente, og i midterzonen, hvor der er hul i sandlaget, går man rimeligt brat fra en 3-lagsmodel til en halvrumsmodel. I inversionsfasen bevirker dette, at de laterale bånd i zonerne, hvor modelsektionen er ækvivalent, kommer i spil, da data alene opløser disse modeller dårligt. Ved overgangen til hullet i lerlaget vil informationen fra de laterale bånd være decideret forkert. Endvidere vil man i zonen, hvor sandlegemet forsvinder, komme i den situation, at antal lag i ens tolkningsmodel ikke stemmer overens med antallet i forwardsektionen. Den viste modelsektion indeholder altså flere aspekter, der sætter LCI-inversionen på prøve.

I figur 4.2 b og c ses LCI-inversionsresultaterne med bånd på 1,14 på hhv. modstander og tykkelser samt modstander og dybder. Som det fremgår af figuren, er bånd på dybderne at foretrække frem for bånd på tykkelserne. Dette er i tråd med, at de variationer, vi ønsker at beskrive, er laggrænsevariationer og ikke absolute tykkelser af de enkelte lag.

Modelsektionen i figur 4.2 c er inversionsresultatet uden laterale bånd. Som det fremgår, er LCI-inversionen at foretrække frem for inversion uden laterale bånd.



Figur 4.2 Inversionsresultater af 2D data fra forwardmollen (a). b-c) LCI-inversion med forskellige laterale bånd. d) uden laterale bånd. 1D model pr. 5. m.

Følgende retningslinier for indstillingerne af de laterale bånd er baseret på en række tests på forskellige model typer:

- Der bør benyttes laterale bånd på både modstande og dybder (ikke på tykkelser).
- Med en sonderingstæthed på 5 m mellem sonderingerne er et bånd på 1,14 for modstander og dybder en fornuftig størrelse⁷.
- Styrken af de laterale bånd er ikke kritisk for inversionsresultatet. Således vil en styrke af båndene i intervallet 1,1-1,3 (ved sonderingstæthed 5 m.) resultere i fornuftige inversionsresultater.
- Man kan med fordel gøre båndene på modstandene lidt kraftigere end på dybderne, f.eks 1,1 for modstandene og 1,3 for dybderne. Herved tillader man lidt

7. De anbefalede værdier er baseret på en støjmodel på 5%. Antages et lavere støjniveau på data, nedtones båndenes betydning i inversionsfasen, og omvendt.

større laggrænse variationer og der er tendens til at strukturerne i modelsektionen opløses bedre.

Er sonderingstætheden en anden end 5 m, omregnes størrelserne på de angivne bånd på følgende måde:

$$LC_x = 1 + \left((LC_5 - 1)^2 \cdot \frac{x}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

x angiver sonderingstætheden, LC_5 er størrelsen af det laterale bånd med en sonderingstæthed på 5 m og LC_x er størrelsen på båndet ved sonderingstætheden X. Et bånd på 1,14 ved en sonderingstæthed på 5 m tilsvare således et bånd på 1,2 ved en sonderingstæthed på 10 m.

4.4 TOLKNINGS BEGRÆNSNINGER

LAGGRÆNSEVARIATIONER

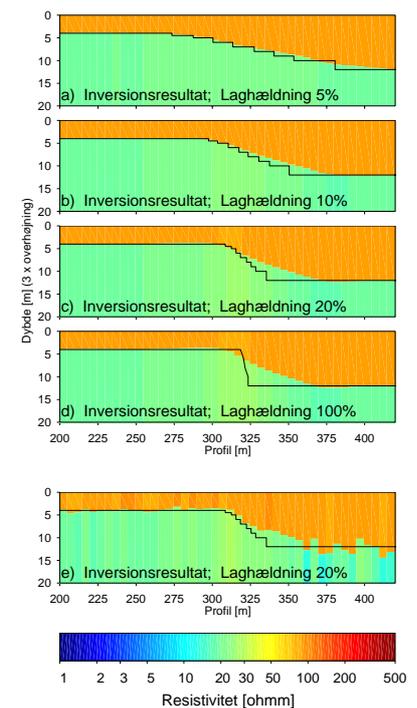
I det følgende belyses hvilke variationsbegrænsningen mht. laggrænser forløb LCI-inversionen evt. medfører.

I figur 4.3 a-d ses LCI-inversionsresultater af syntetiske 2D-PACES-data. Data er inverteret med en sonderingstæthed på 5 m og med laterale bånd på dybder og modstande på 1,14. Som det fremgår af plottene er den stejleste laghældning, der kan estimeres korrekt, ca. 10% ($\approx 20^\circ$).

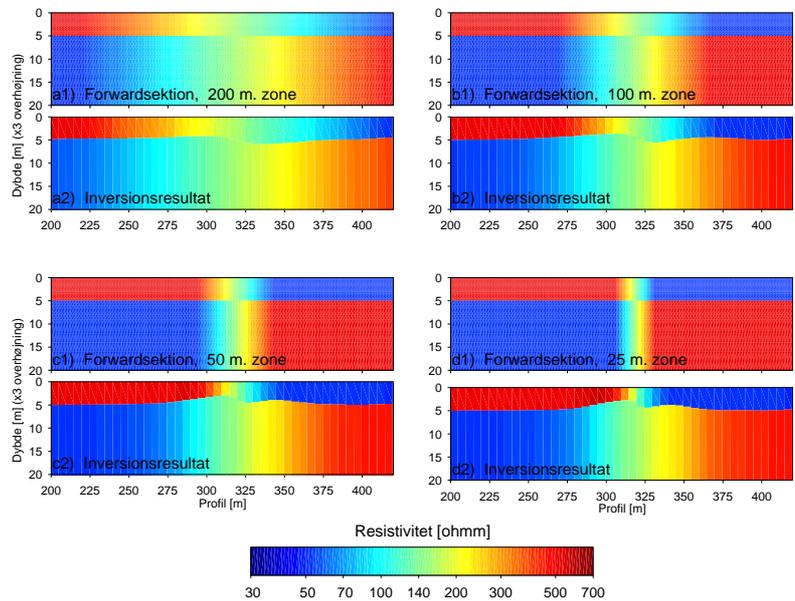
I hele forløbet fra rådata til geofysisk model er der tre faktorer, der glatter modellestimatet og begrænser variation:

- Lateral midling af data.
- Den stykvisse endimensionale tolkningsmodel.
- De laterale bånd.

I figur 4.3 e ses inversionsresultatet af samme datasæt som i sektion c. Her er data ikke midlet, og inversionen er foretaget uden laterale bånd. Som det fremgår af sektionen, er der ikke væsentlig forskel på den estimerede laghældning i sektion c og e. Det kan således konkluderes at det hverken er midlingen af data eller de laterale bånd, der er den begrænsende faktor for, hvor stejle laghældninger der kan



Figur 4.3 Den sorte streg angiver laggrænsen fra forwardsektionen. Den farvede sektion inversionsresultatet. modstanden i forwardsektionen er hhv. 90 og 20 Ω m. a-d) LCI-inversions. e) Inverteret uden laterale bånd og uden midling af data.



Figur 4.4 a1-d1) Forwardsektioner med logaritmisk fordelt modstandsovergang. a2-d2): Tilhørende LCI-inversionsresultater.

estimeres ved LCI-inversion. Derimod er det den stykvisse éndimensionale tolkningsmodel, der er den begrænsende faktor. Yderligere undersøgelser har vist, at den maksimale laghældning på de ca.10%, der kan estimeres, i udpræget grad er model-uafhængig.

MODSTANDSVARIATIONER

På samme måde som for laggrænsevariationer belyses i det følgende, hvor kraftige laterale modstandsvariationer der kan estimeres ved LCI-inversion.

Modelsektionen, der testes på, er en 2-lagssektion med modstandsovergange fordelt logaritmisk fra 50 til 500 Ω m i begge lag over forskellige afstande, som vist i figur 4.4 a1-d1. Som det fremgår af sektion a2 estimeres modstandsvariationerne i dette tilfælde helt korrekt. Gøres overgangszonen mindre end 200 m som i figur 4.4 b1-d1, begynder det at give estimeringsproblemer. Dette

er mest udpræget for andet lags vedkommende, som det fremgår af de tilhørende inversionsresultater i sektion b1-d1.

Som ved estimeringen af laghældninger kan det påvises, at den éndimensionale tolkningsmodel, der er den begrænsende faktor for modstandsvariationerne, og ikke de laterale bånd. Dette forklarer, hvorfor overgangszonen i første lag bliver mindre end i andet lag. De korte elektrodeafstande bestemmer hovedsageligt modstanden i toplaget, og de lange elektrodeafstande modstanden i bundlaget. Det jordvolumen, som én opstilling midler over, vil altså være langt større for de store elektrodeafstande end for de små afstande. 2D-effekterne vil derfor være langt større for de store elektrodeafstande.

Inversionsresultatet i figur 4.4 b2 er også et eksempel på, at variationer i inversionsresultatet kan være kraftigere end den information, de laterale bånd kommer med. Den maksimale

variation over n sonderinger, som de laterale bånd "tillader", er givet ved:

$$\sqrt{n} \cdot (LC_{res} - 1) \cdot \log \rho_1 = \log \rho_2 \quad (4.2)$$

LC_{res} er størrelsen af de laterale bånd på modstandene, ρ_1 er startmodstanden og ρ_2 er den maximale modstandsforandring, der kan ske over n

sonderinger. Med $\rho_1=50 \Omega m$ og $r_2=500 \Omega m$ og $LC_{res}=1,14$ medfører det $n \approx 128$. Med en sonderingstæthed på 5 m vil det sige, at overgangszonen for at harmonere med de laterale bånd minimum skal være ca. 650 m. At overgangszonen kan blive væsentligt mindre en 650 m skyldes, at data opløser modellerne godt, hvilket medfører, at de laterale bånd betydning i inversionsfasen nedtones.

4.5 SUPPLERENDE LITTERATUR

Foged, N., Inversion med lateralt sammenbundne modeller af 2-dimensionale stokastiske resistivitetsfordelinger, 2001, speciale afhandling, Aarhus Universitet, Geologisk Institut (Bilag 1). I afsnit 8.1 i speciale afhandlingen findes en gennemgang af model resolutions-matricer. I dette afsnit belyses bl.a samspillet mellem data og bånd i bestemmelsen af de enkelte modelparametre. I afsnit 8.2 er der et bredt udsnit af modelsektioner de fundne indstillinger af som de laterale bånd er bestemt ud fra.

Auken, E., Thomsen, P., and Sørensen, K., 2000, Lateral constrained inversion (LCI) of profile oriented data - the resistivity case: Proceedings of the 6th Meeting of the Environmental & Engineering Geophysical Society (European Section), Bochum, Germany.

Auken, E. and Sørensen, K., 1999, Laterally constrained inversion of densely measured profile oriented EM data in "soft" 3D sedimentary environments: Salt Lake City, Utah, 232-236.

Wisén, R., Auken, E., and Dahlin, T., 2002, Comparison of 1D laterally constrained inversion and 2.5D inversion of cves resistivity data with drilling data as apriori information: Proceedings, 8th meeting, Aveiro, Portugal, EEGS-ES

Ovenstående proceedings samt tilhørende presentationer kan hentes på GeoFysiskSamarbejdets hjemmeside: www.gfs.au.dk

5

MODELGENKELDELSE

I dette kapitel undersøges pålideligheden af inversionsresultaterne fra LCI-inversionen.

5.1

BELYSNINGSMETODER

Undersøgelsen af LCI-metoden bygger på, at der genereres syntetiske slæbegeoelektriske data fra en 2D-modstandsfordeling (forwardsektionen), som derefter inverteres ved LCI-inversion. Den estimerede model sammenlignes herefter med forwardsektionen. Ud fra følgende tre kriterier vurderes, hvor vellykket inversionen har været:

- Modstandssammenligning punkt for punkt af forwardsektion med inversionsresultatet.
- Estimering af middelmstanden i tre dybdeintervaller.
- Estimering af den geologiske lertykkelse.

Undersøgelse af geoelektriske metoder med 1D-tolkninger er traditionelt blevet udført ved systematisk gennemgang af modeltyper - 2-3-4 lagsmodeller; maksimums-, minimumsmodeller; dobbelt opstigende-, dobbelt nedstigende modeller osv.. Man får ved sådan en undersøgelse belyst ækvivalensproblemer, lagundertrykkelse mm..

Sådanne simple modeltyper er ikke tilstrækkelige til at undersøge LCI-metoden. Dels fordi de laterale bånd ikke kommer i spil, da modstandene/laggrænserne ikke varierer hen gennem forwardsektionen. Dels fordi man altid får tolket sin forwardsektion med det faktiske antal lag. Og ikke mindst fordi modellerne er en for simpel beskrivelse af de virkelige forhold. Det er således vigtigt at teste metoden på sektioner, der har stor lighed med de faktiske geologiske forhold. Dette rejser to problemer:

- Hvordan er de virkelige geologiske forhold?
- Hvordan beskriver vi dem i alle detaljer?

Det må gælde, at de faktorer, som metoden er mest følsom overfor, også er de faktorer, der indhentes oplysninger om. Forwardsektionerne, som de syntetiske data genereres ud fra, skal således beskrive modstandsfordelingen i jorden. Endvidere er det vigtigt, at detaljeringsgraden i forwardsektionerne er større er den tolkningsmodel, der bruges i inversionsfasen. Herved opnår man en væsentlig reduktion af de syntetiske datas afvigelse fra virkelige data set ud fra den anvendte tolkningsmodels synspunkt.

Der bliver som omtalt brugt syntetiske data genereret ud fra en 2D-modstandfordeling til LCI-inversion med en 1D-tolkningsmodel. Ovenstående forhold er derved opfyldt, idet detaljeringsgraden i forwardsektionen er langt større end tolkningsmodellens og dimensionen er højere.

Forwardsektionerne til undersøgelse af LCI-metoden tager udgangspunkt i en simpel 2 eller 3 lagsmodel. Den simple udgagsmodel tilføjes herefter kort- og langbølgede variationer genereret ud fra en stokastisk proces. En forwardsektion vil således indeholde en række geologiske scenarier.

MODELKLASSER OG TYPER

I figur 5.17 a side 41, ses et eksempel på en forwardsektion. I dette tilfælde

er der taget udgangspunkt i en tre-lagsmodel med $\rho_{1-3} = [200 \ 40 \ 200]$ Ωm og laggrænserne i 3 og 8 m. Modelklasse betegner udgangsmodellen. For den i figur 5.17 viste forwardsektion (modelklasse 3 type D) er modstandsvariationerne relativt store, mens laggrænsevariationerne er mere beskedne. Typen betegner hvor kraftige modstande og laggrænser varierer i forwardsektionen.

Følgende modelklasser og typer er analyseret:

MODELKLASSER

1. modstand [200, 30] Ωm
lagtykkelse [4] m.
2. modstand [40, 100] Ωm
lagtykkelse [4] m.
3. modstand [200, 40, 200] Ωm
lagtykkelse [3, 5] m.
4. modstand [50, 200, 50] Ωm
lagtykkelse [3, 5] m.
5. modstand [300, 80, 30] Ωm
lagtykkelse [3, 5] m

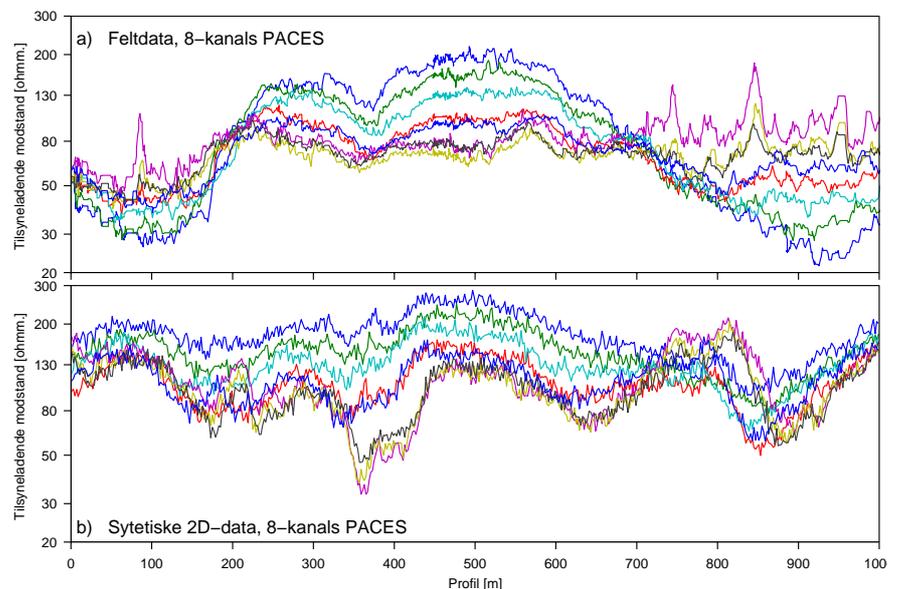
6. modstand [50, 100, 300] Ωm
lagtykkelse [3, 5] m.

TYPER

- A) Rolige modstands- og laggrænsevariationer.
- B) Kraftige modstands- og laggrænsevariationer.
- C) Kraftigt varierende laggrænser.
- D) Kraftige modstandsvariationer.

For 2-lagssektioner (modelklasse 1 og 2) anvendes type A og B. For 3-lagssektioner (modelklasse 3-6) anvendes type A, C og D. Dette giver ialt 16 kombinationer. For hver kombination er der genereret og tolket 10 km profil. Det er således sammenligningen mellem de 10 km lange forwardsektioner for hver modelklasse + type og LCI-inversionsresultaterne, som danner grundlaget for resultaterne der præsenteres i afsnit 5.3.

Om forwardsektionen repræsenterer et geologisk realistisk senaria kan bl.a



Figur 5.1 Data fra de 8 kanal på PACES-udstyret. a) feltdata. b) Syntetiske PACES-data adderet 5% støj.

vrurderes ud fra en sammenligning af de syntetiske data med rigtige felt-data - som i figur 5.1. Som det fremgår af figuren har de to datasæt tilnærmelsesvis samme karakter, hvilket indikerer, at den underliggende geologi og datastøjen også har samme karakter.

I figur 5.5 a - figur 5.20 a ses plot af 750 m af forwardsektion fra alle klasser af alle typer. Som det fremgår af figurerne skal modelklasserne ikke tages for bogstaveligt. Dels tynder lag i forwardsektionerne nogle steder helt ud og forsvinder, dels bevirker modstandsvariationerne for eksempel, at maksimumsmodeller til tider bliver til minimumsmodeller. Taget in mente,

at geoelektrikken skalerer i tykkelse og modstande, afdækker de omtalte modelklasser og typer således et meget stort modelområde. Ud over variationer i lagtykkelser og modstand dækker de valgte modelklasser og typer også situationer, hvor tolkningsmodellen har flere lag, end der er i forwardsektionen, samt at variationer i dybder og modstande er kraftigere, end de laterale bånd foreskriver. De valgte forwardsektioner repræsenterer således et solidt grundlag for undersøgelsen af LCI-tolkningsmetoden.

5.2 SAMMENLIGNINGSKRITERIER

MODSTANDSDIFFERENCE

Det første sammenligningskriterium er en modstandssammenligning punkt for punkt mellem forwardsektionen og LCI-inversionsresultatet. Dette har til formål at belyse, hvor godt en sektion i helhed estimeres. I det forwardsektionen og modelestimatet ikke er endeligt samlet, sammenlignes modstandsområder på $1 \times 0,5 (x,z)$ m svarende til den mindste cellestørrelse i forwardsektionen. For hver celle udregnes forholdet mellem modstandene ($C_{(x,z)}$) - således:

$$C_{(x,z)} = \frac{\exp \left\| \log(\rho_{\text{true}(x,z)}) - \log(\rho_{\text{est}(x,z)}) \right\|}{\rho_v} \quad (5.1)$$

ρ_{true} er modstanden fra forwardsektionen, og ρ_{est} er modstanden fra LCI inversionsresultatet. $C_{(x,z)}$ er således en gange/dividere fejl på den estimaterede modstand i den pågældende celle. I figur 5.2 ses den beregnede

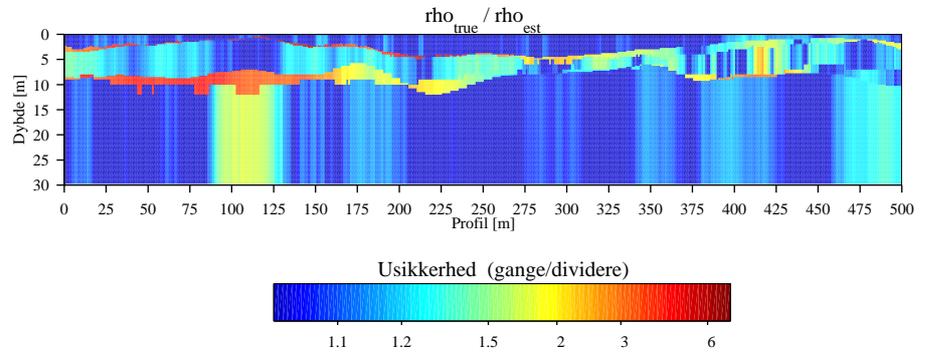
$C_{(x,z)}$ -værdi for en modelsektion.

Som det fremgår af sektionen, opnår man i de zoner, hvor laggrænserne estimeres forkert, meget store fejl. I disse zoner vil estimeringsfejlen nogle steder nå helt op på en faktor 60 - for eksempel hvor $10 \Omega\text{m}$ sammenlignes med $600 \Omega\text{m}$. Zonerne med meget høj estimeringsfejl er ikke nødvendigvis et udtryk for, at modelestimatet er meget dårligt, men kan som her skyldes, at laggrænserne er estimeret få m forkert

Resultaterne fra sammenligninger af modstandene i modelsektionerne opgøres som vist i f.eks. figur 5.5 d.

MIDDELMODSTANDSLAG

Middelmodstandskort er en måde at præsentere tolkningsresultaterne på. Dette gøres for at opnå en 3D-visualisering af modstandsforholdene i det undersøgte område. Middelmodstanden beregnes for tre intervaller; 0-5, 5-15 og 15-30 m. Middelmodstanden ρ_v i dybdeintervallet [A;B] beregnes på følgende måde:



Figur 5.2 Forhold mellem ρ_{true} og ρ_{est} for celler af størrelsen 1x0.5 m. Forholdet kan betragtes som en gange/dividere fejl på ρ_{est} .

$$\rho_v = \frac{\sum_i \rho_i \cdot d_i}{\sum_i d_i} \quad (5.2)$$

d_i er tykkelsen af den del af et tolket lag, der falder inden for intervallet [A;B], og ρ_i er modstanden fra model-estimatet i d_i .

I figur 5.3 ses plot af middelmodstanden i de tre intervaller for 1 km. af en sektion. Som det fremgår af figuren, estimeres de meget kortbølgede variationer i intervallet 0-5 m endog meget godt. For intervaller 5-15 m er det kun de langbølgede variationer, der kan estimeres. De relativt små variationer i forwardsektionen for det sidste middelmodstandslag kan ikke estimeres. Inversionsresultatet kommer blot ud med en meget blød middelkurve. Ovenstående forhold stemmer overens med, at opløseligheden for DC-metoden aftager med dybden. Estimeringsfejlen ($E_{(x,l)}$) mellem forwardsektionen og LCI-inversionsresultater beregnes på følgende måde:

$$E_{(x,l)} = \exp \left\| \log(\rho_{v,true(x,l)}) - \log(\rho_{v,est(x,l)}) \right\| \quad (5.3)$$

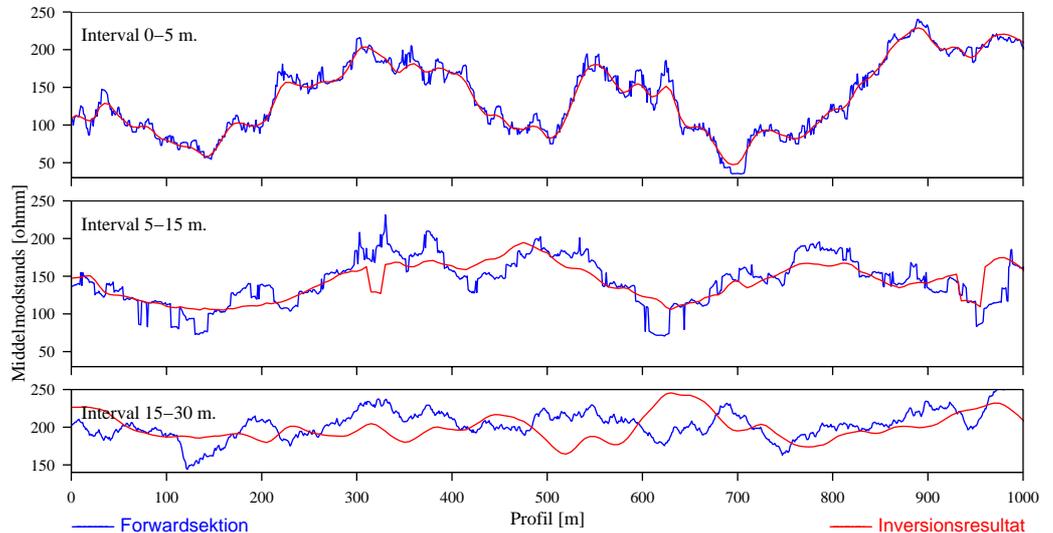
hvor $\rho_{v,true(x,l)}$ er middelmodstanden i et 5 m lateral interval⁸ ved position x for det l' de middelmodstandslag i forwardsektionen. $\rho_{v,est(x,l)}$ er således middelmodstanden i det l' de lag ved position x i inversionsresultatet.

Resultaterne af sammenligningerne mellem forwardsektionerne og LCI-inversionsresultaterne præsenteres som, hvor stor en procentdel af middelmodstandslaget der estimeres med en given fejl (se f.eks figur 5.5 e)

GEOLOGISK LERTYKKELSE

Til sårbarhedsvurdering af bl.a. grundvandsmagasiner er tykkelsen af et eventuelt overliggende lerlag særdeles vigtig at kende. Tilstedeværelsen af ler er altdominerende for nedrivningshastigheden og derved

8. Sonderingstætheden er 5 m. Én tolket sondering repræsenterer således et 5 m lateralt interval og skal derfor sammenlignes med et 5 m interval i forwardsektionen.



Figur 5.3 Sammenligning af middelmotstanden fra forwardsektionen og LCI-inversionsresultatet i de tre dybdeintervaller for en sektion (modelklasse 3 type A).

for, hvor godt et grundvandsmagasin er beskyttet. Udfra modstandsmodellem beregnes antal meter ler, der er tilstede - den såkaldt geologisk lertykkelse (GL). Den geologiske lertykkelse udtaler sig om den samlede lertykkelse i de øverste 30 m af lagpakken. Beregning af lertykkelsen ud fra lagmodulmodstanden (R) foretages på følgende måde:

Lag hvor $R \leq R_1$

$$GL_1 = \sum \text{lagtykkelser}$$

Lag hvor $R > R_1$ og $R < R_2$

$$GL_2 = \sum \text{lagtykkelser} \cdot \left(\frac{\log R - \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \right)$$

Lag hvor $R > R_2$

$$GL_3 = 0$$

$$GL = GL_1 + GL_2 + GL_3$$

$$R_1 = 40 \Omega m$$

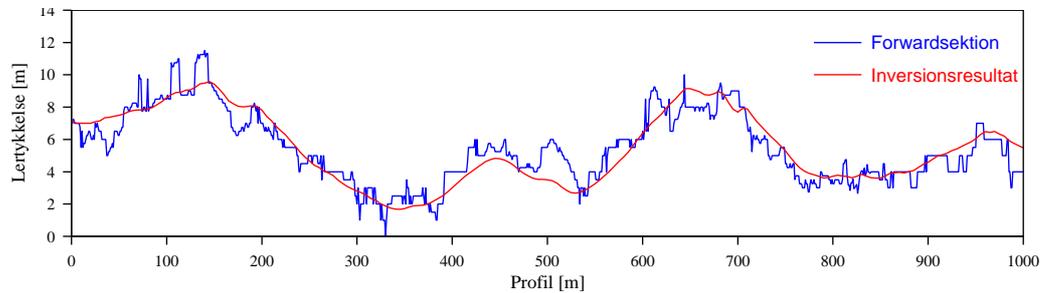
$$R_2 = 55 \Omega m$$

(5.4)

Modstande under $40 \Omega m$ antages at være ler og vægtes således med tykkelsen af laget. Modstande mellem 40 og $55 \Omega m$ antages at have et vist lerindhold og vægtes således med tykkelsen gange en logaritmisk vægtfunktion, der løber mellem 1 og 0 . Lerindholdet i lag med modstande over $55 \Omega m$ antages at være så lille, at disse lag ikke har en beskyttende effekt, og disse lag bidrager derfor ikke til den geologiske lertykkelse.

I figur 5.4 ses plot af den geologiske lertykkelse fra en forwardsektion og det tilhørende LCI-inversionsresultat. Som det fremgår af figuren, genfindes de langbølgede karakterer i sektionen, mens variationer med en bølgelængde under ca. 100 m som forventet glattes ud.

For hver af de 10 km lange sektioner beregnes differencen mellem den geologiske lertykkelse fra forwardsektionen (GL_{true}) og den estimerede (GL_{est}).



Figur 5.4 Sammenligning af den geologiske lertykkelse fra forwardsektionen og LCI inversionsresultatet.

$$\Delta GL_x = \|GL_{true, x} - GL_{est, x}\| \quad (5.5)$$

Estimeringsfejlen ΔGL_x (ligning 5.5) angiver således fejl skønnet i absolute meter ler. Resultaterne præsenteres procentdele af sektionen, der estimeres med en given fejl opdelt i intervallet.

5.3 RESULTATER

I figur 5.5 - figur 5.20 findes resultaterne af sammenligningerne ud fra de beskrevne tre kriterier, for alle modelklasser og typer. Hver af figursiderne indeholder resultaterne for den i titlen angivne modelklasse og type. Sektion a på figursiderne er et 750 m udsnit af den 10 km lange forwardsektion. Sektion b er det tilhørende LCI-inversionsresultat med usikkerhederne (analysen) på modelparametrene i plot c. Der er i LCI-inversionen brugt laterale bånd på 1,1 for modstande og 1,3 for dybder. Sondringstætheden er 5 m med en støjmodel på 5%.

Plot d på figursiderne angiver resultaterne af modstandssammenligningen. Tallene over søjlerne angiver den kumulative sum. Figur 5.5 b skal således "læses" på følgende måde: Modstanden i 83% af modelsektionen estimeres med en fejl, der er mindre end en faktor 1,2. Ca. 15% estimeres med en fejl i intervallet 1,2-1,5. Dvs. at 98% estimeres med en fejl mindre end faktor 1,5.

I plot e ses resultaterne af sammenligningen af middelmstanden. Plot e skal "læses" på samme måde som plot d, her er blot en søjle for hvert middelmodstandslag.

Sammenligning af den geologiske lertykkelse ses i plot f. Tallet i parentes angiver middellertykkelsen i forwardmodellen. Plot f skal læses på samme måde som plot d og e. Man skal dog være opmærksom på at estimeringsfejlen er meter ler og ikke en faktor.

MODELKLASSE 1 OG 2

I figur 5.5 og figur 5.6 ses resultaterne for modelklasse 1 og 2 type A, som repræsenterer 2-lagssektioner med "langsomt" varierende modstande og laggrænser. Som forventet estimeres forwardsektionen godt, med den forventede glatning af modstandene og laggrænser. Ud fra analysen (plot c) ses, at modelparametrene i modelklasse 1 opløses lidt bedre end i klasse 2. Dette skyldes primært, at der i en nedstigende model løber en relativt større del af strømmen i bundlaget i

den opstigende model, og der er således mere information tilgængelig om bundlaget i den nedstigende modeltype. De tre sammenligningskriterier vidner også om en meget god estimering af forwardsektion.

Figur 5.7 og figur 5.8 indeholder forwardsektion og LCI-inversionsresultatet for modelklasse 1 og 2, type B (2-lagsmodeller). Som det fremgår af forwardsektionerne i figuren, er variationer i modstande såvel som i laggrænsen væsentligt kraftigere end i den foregående type. Inversionsresultaterne udviser også en kraftig glatning af laggrænsen. I bestemmelsen af middelmodstande (plot e) ses tydeligt, at metoden er bedst til at bestemme den øverste del af lagpakken. Således estimeres 93% af middelmodstande i laget 0 - 5 m med fejl mindre end 1,2 mod kun 69% for middelmodstandslaget i intervallet 15-30 m.

Generelt estimeres 2-lagsmodeller overordentligt godt, hvilket primært skyldes datas gode opløsning af modellerne. For 3-lagsmodellernes (modelklasse 3-6) vedkommende må det forventes, at inversionsresultaterne er knapt så gode, idet der for 3-lagsmodellerne i højere grad er ækivalensproblemer inde i billedet. Endvidere er der også flere modelparametre, der skal bestemmes med den samme mængde data.

MODELKLASSE 3-6

Modelestimaterne for type A for 3-lagsmodellerne (figur 5.9 til figur 5.12) er generelt meget tilfredsstillende. De tre sammenligningskriterier vidner også om et tilfredsstillende inversionsresultat. Generelt for type A estimeres modstanden i ca. 88% af sektionen med en fejl mindre end 1,2 og hele 95% mindre end en faktor 1,5. Middelmodstande estimeres i 85-97% af sektionerne med en fejl mindre end 1,2 for alle tre middelmodstands lag. Kun middelmodstanden i intervallet 5-15 m for modelklasse 4 type A (figur 5.10) afviger.

Når man tager de lav- og højmodstandsækvivalente tilfælde, som forwardsektionen indeholder, i betragtning, er inversionsresultaterne forbløffende gode for type A modellerne.

I figur 5.13 til figur 5.16 ses resultaterne vedrørende type C - typen med de stærkt fluktuerende laggrænser. Til trods for at forwardsektionerne i type C til tider indeholder laghældninger stejlere end hvad der ifølge afsnit 4 kan estimeres, fremkommer LCI-inversionen med acceptable modelestimater, indeholdende hovedtrækkene fra forwardsektionen. Estimeringen af modstanden (plot d) er dåligere end for type A sektionen. 70-80% af sektionen estimeres med en fejl mindre end en faktor 1,5 mod ca. 95% for type A. Procentdelen, der estimeres med en fejl større end 2, er for type C sektioner 10-15%. Bidraget til dette interval kommer primært fra de områder, hvor laggrænserne fejlestimeres. Middelmodstands lagene estimeres generelt bedre end modstanden som følge af midlingen af modstanden i et område. Som forventet estimeres modstanden i første middelmodstands lag bedre end i de to dybereliggende middelmodstands lag. Generelt for type C sektionerne er det modelklasse 4, der fremkommer med de dårligste modelestimater set ud fra de tre analysekriterier.

Inversionsresultater for type D findes i figur 5.17 - figur 5.20. Til trods for de meget kraftige variationer i modstande udviser inversionsresultaterne stor lighed med forwardsektionerne, selvfølgelig med en udglatning af de relativt skarpe modstandskontraster. Specielt kraftige modstandskontraster i den dybereliggende del af en sektion udglattes relativt meget. Dette skyldes, dels at informationen om den dybereliggende del er relativt begrænset, dels at fokuseringen aftager med dybden. I forhold til type C er analyseresultaterne for type D generelt bedre. For f.eks. estimeringen af middelmodstanden i intervallet 0-5 er resultaterne sammenlignelige med

type A med en procentdel på ca. 90% med estimeringsfejl mindre end 1,2.

En generel sammenligning af de tre typer viser, at type A med den roligt varierende geologi som forventet estimeres bedst. Endvidere er LCI-metoden mere robust over for kraftige modstandsvariationer (type D) end over for kraftige variationer i laggrænser (type C).

Sammenlignes modelklasserne, er resultaterne for modelklasse 4 generelt er dårligere end for de øvrige tre modelklasser. Dette skyldes, at det ækvivalente lag i denne modelklasse er et højmodstands-lag. En højmodstands-ækvivalens er mere udtalt end en lavmodstands-ækvivalens, da en mindre del af strømmen vil løbe i højmodstands-laget end i lavmodstands-laget. Informationen om højmodstands-laget vil således være relativt mindre, med deraf følgende dårligere bestemmelse.

Betragtes estimeringen af den geologiske lertykkelse generelt⁹, fremgår

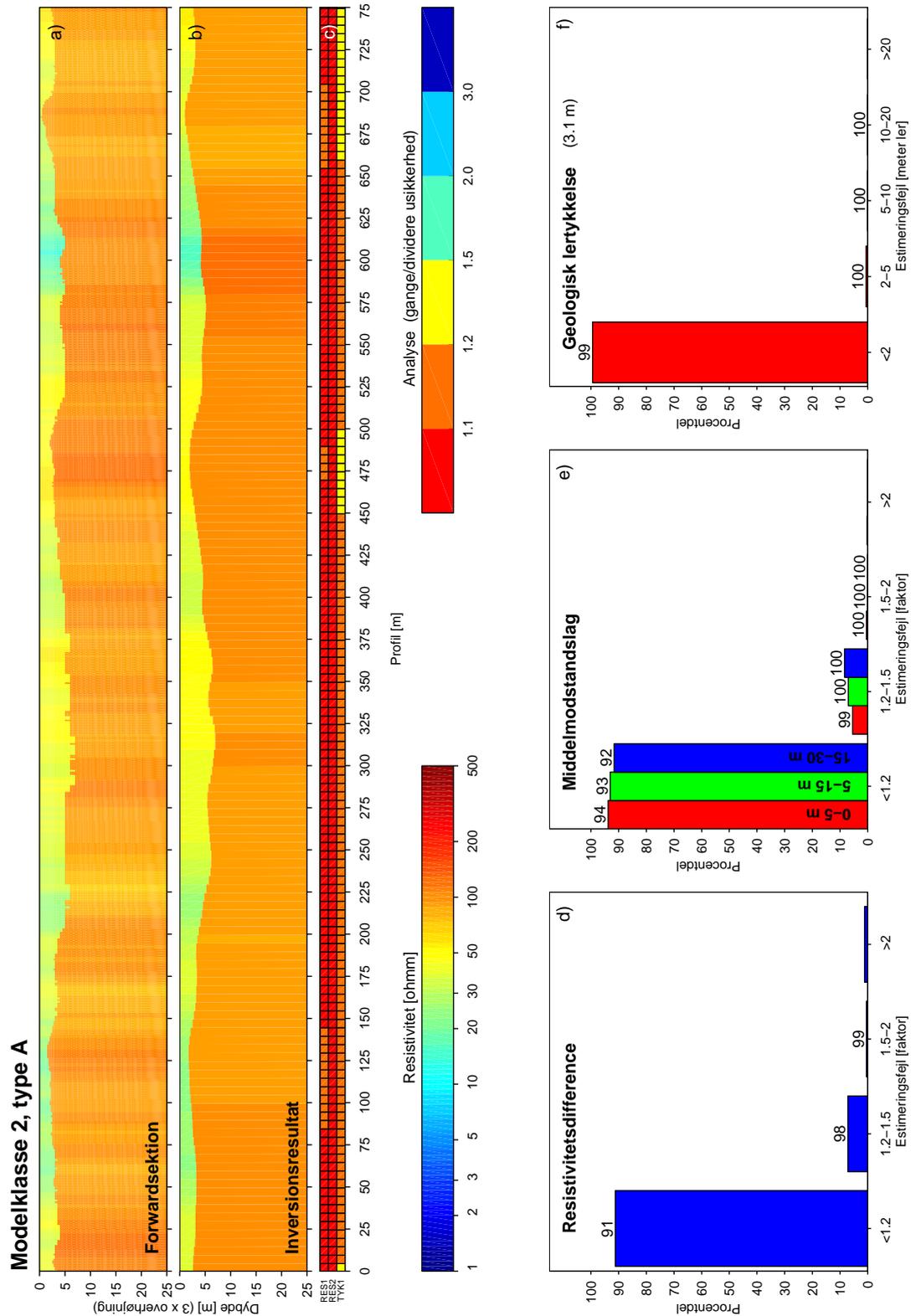
det, at estimeringerne er mindre gode, når lerbidraget stammer fra lag med modstande der varierer omkring lerbidragsgrænsen på de 55 Ωm . Dette er bl.a. tilfældet for modelklasse 3 og 4 type C (figur 5.13 på side 37 og figur 5.14 på side 38). Dette skyldes at en estimeringsfejl på modstande, der ligger omkring denne lerbidragsgrænse vil have relativ stor indflydelse på, hvor godt den geologiske lertykkelse estimeres. Hvis f.eks. en modstand på 40 Ωm estimeres 30% for højt, går den fra at bidrage med vægtning 1 i den geologiske lertykkelse i forwardsektionen til ikke at bidrage til den geologiske lertykkelse i den inverterede model. Dette er ikke tilfældet med en modstand på f.eks. 10 eller 200 Ωm . Den omtalte skalering i tykkelser og modstande i DC-problemet gælder altså ikke, når den geologiske lertykkelse betragtes.

9. Der ses bort fra modelklasse 6, da lerindholdet i disse sektioner er meget lille.

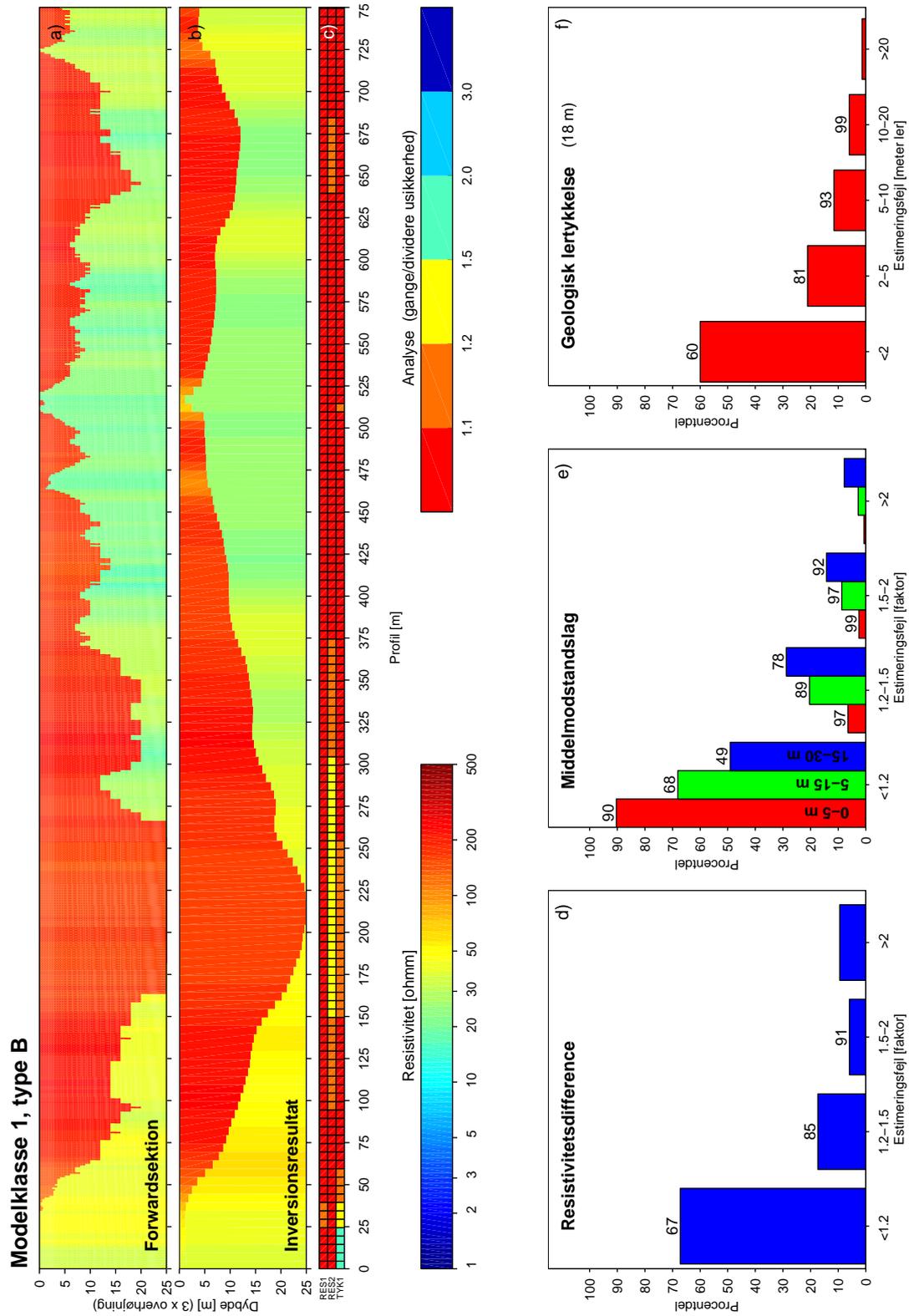
5.4 LCI OG ALM. 1D INVERSION

Resultaterne præsenteret i figur 5.21, side 45, tilhører modelklasse 4 type D. Her er inversionen blot foretaget uden de laterale bånd. Sammenlignes med LCI-inversionsresultaterne, (figur 5.18, side 42) fremgår det tydeligt, at LCI-inversionen er en forbedring i forhold til almindelig 1D-inversion. De stærkt fluktuerende laggrænser og modstandsværdier, specielt for andet lag, findes ikke i LCI-inversionsresultatet. Sammenlignes de to analyser (plot c) i figurene ses også, at modelparametrene bestemmes bedre ved LCI-inversionen end ved den almindelige 1D-inversionsmetode.

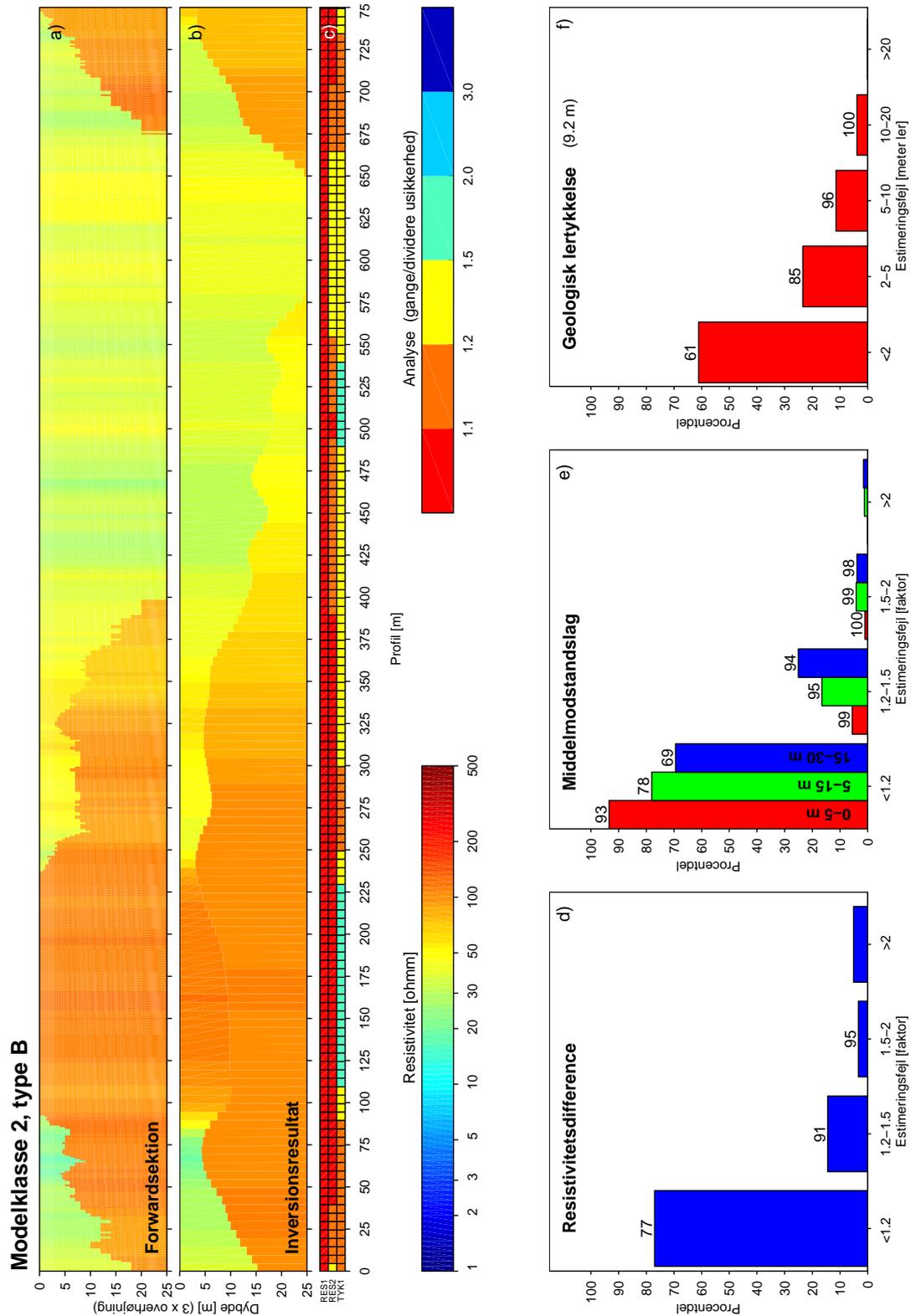
Estimeringsfejlene er også generelt lavere ved LCI-inversionen end ved den almindelige tolkning. Sammenlignes det første estimeringsinterval for alle tre sammenligningskriterier, medfører LCI-metodikken en forbedring på ca. 10 procentpoint. Forwardsektionen i figur 5.21 er en af de typer, hvor LCI-inversionsmetoden har sin force (ækvivalente modeller med langsomt varierende laggrænser). For modeltyper, hvor data i højere grad er i stand til at opløse de enkelte modeller, vil fordelene ved LCI-inversion ikke være så fremtrædende som i det viste eksempel.



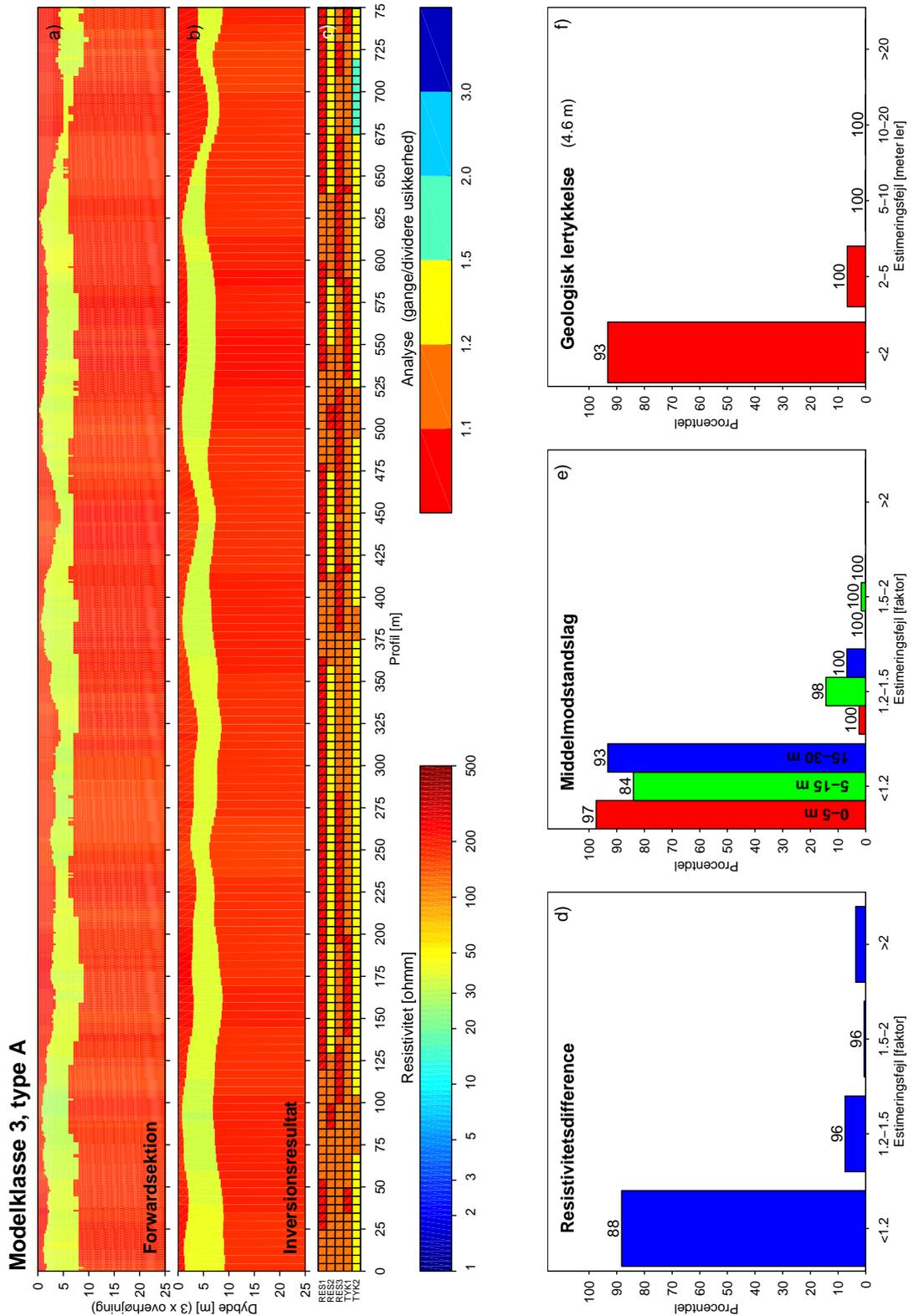
Figur 5.6 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmotstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



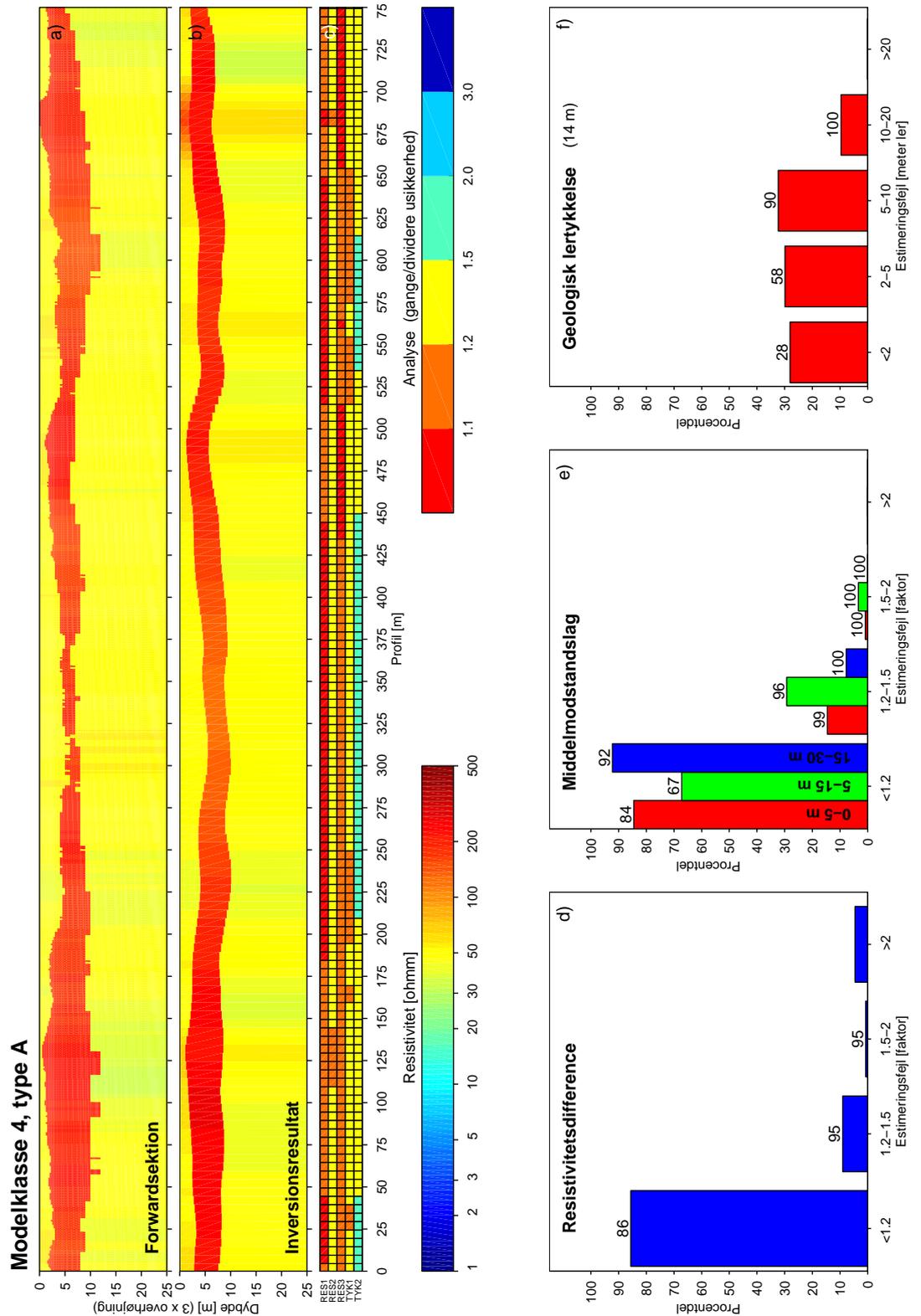
Figur 5.7 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



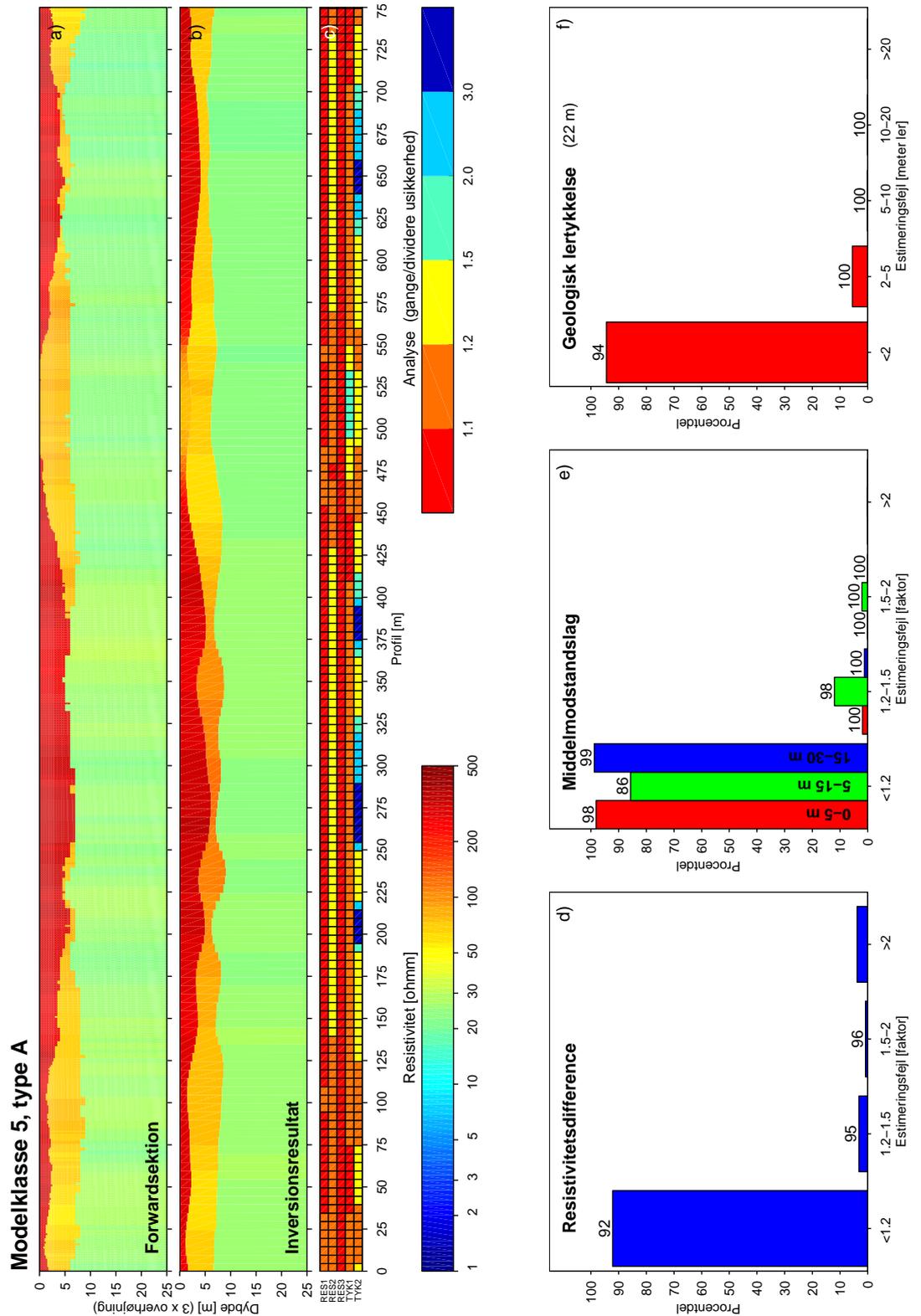
Figur 5.8 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



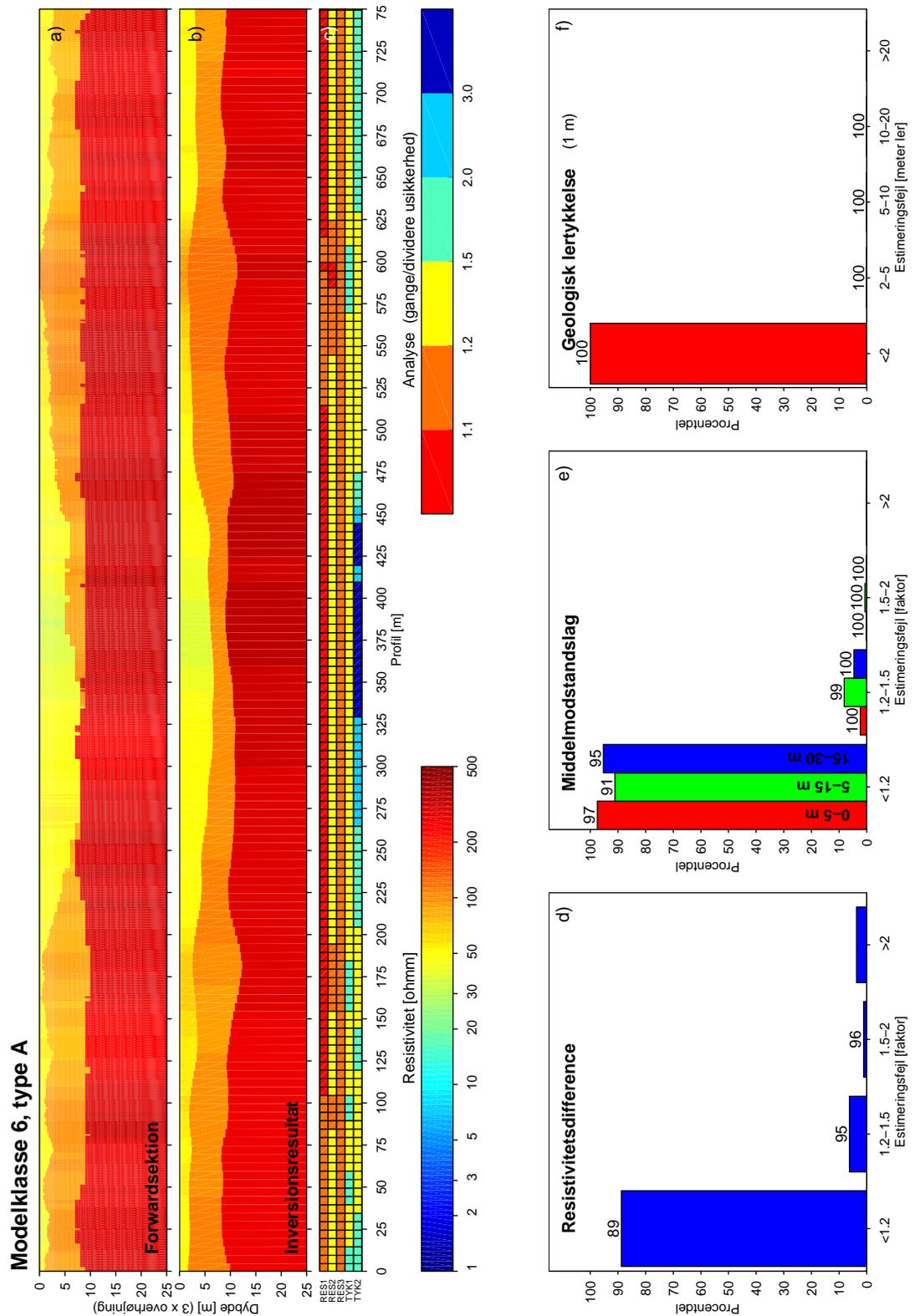
Figur 5.9 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmotstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



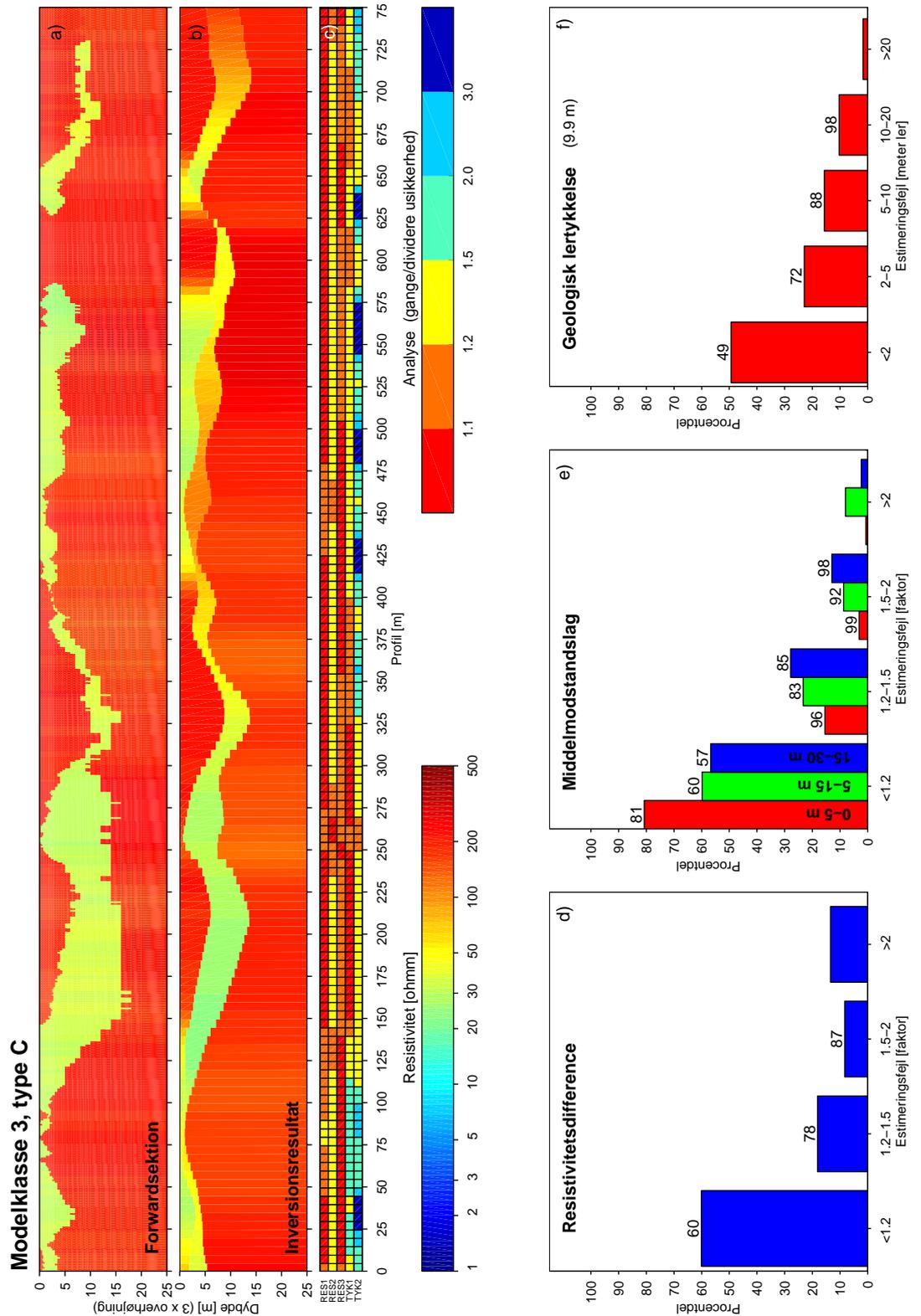
Figur 5.10 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



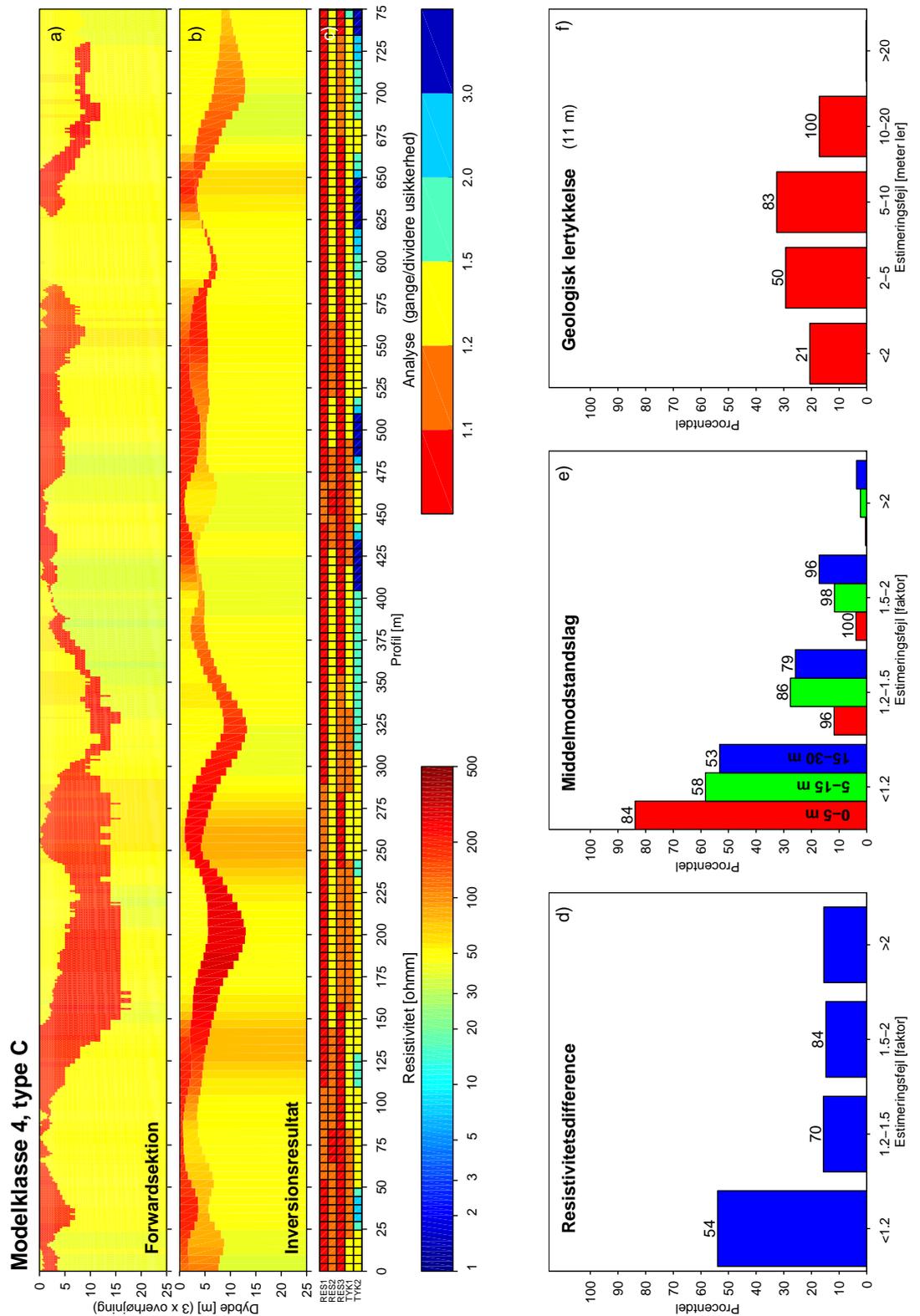
Figur 5.11 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmådsstagslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



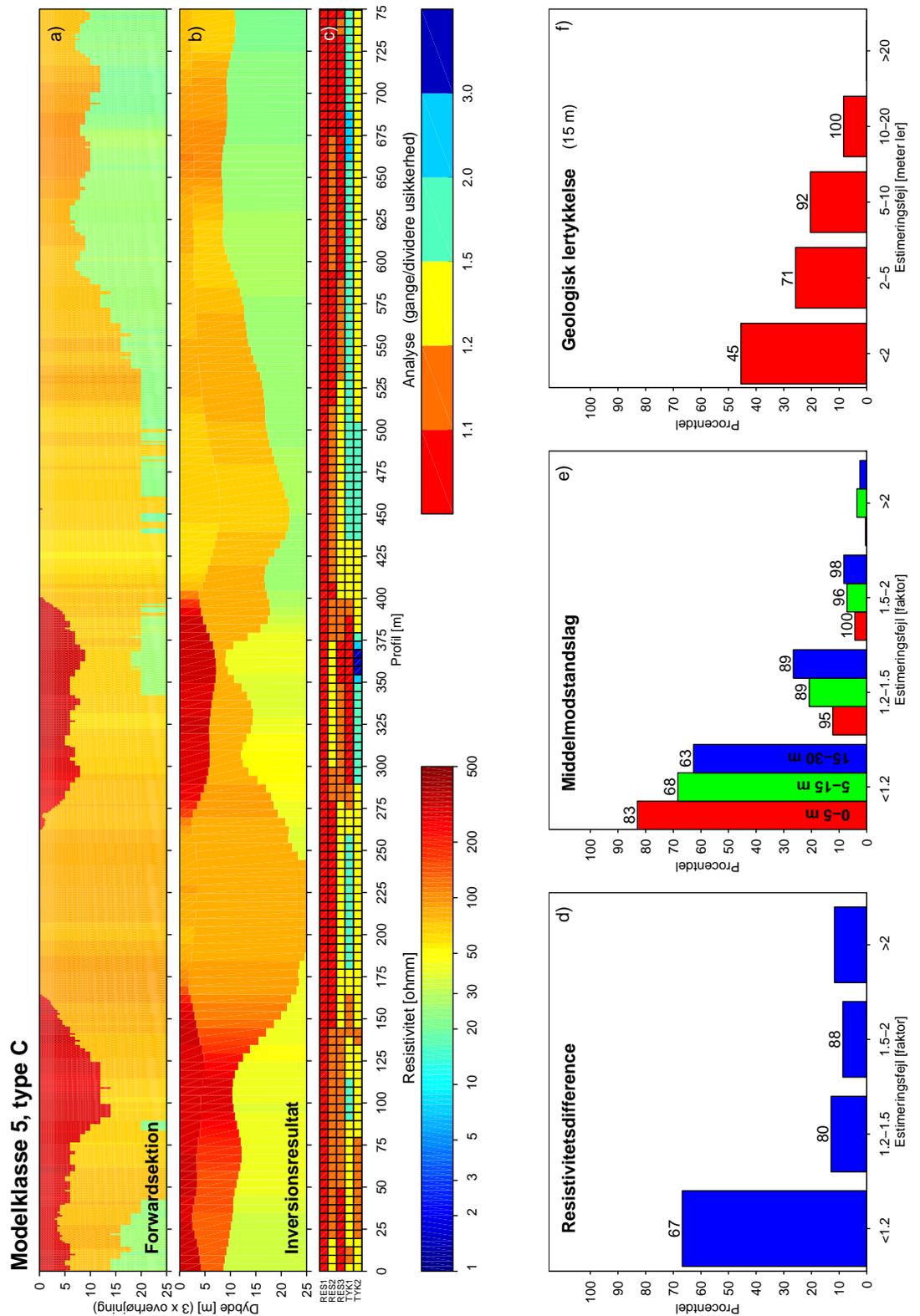
Figur 5.12 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



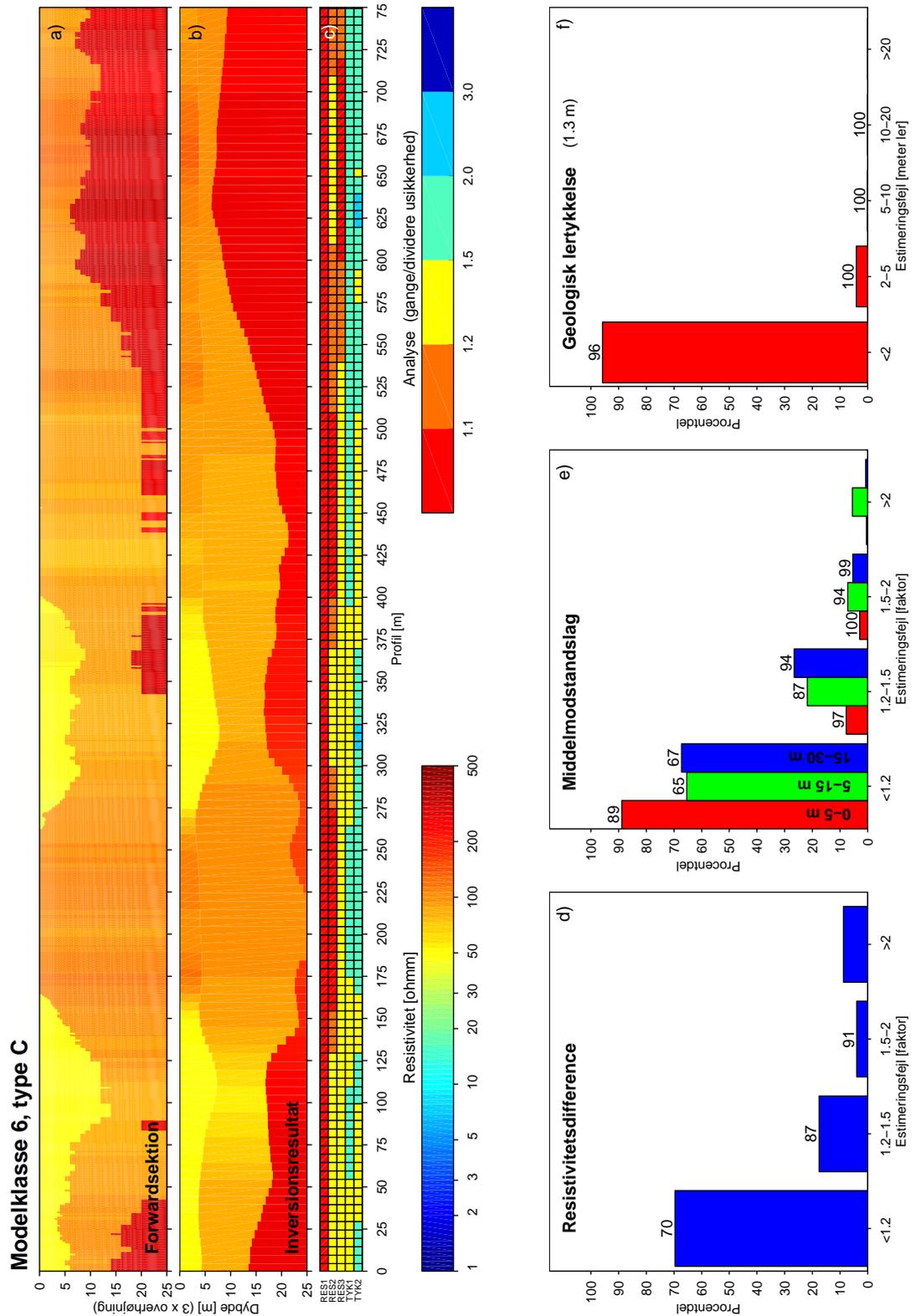
Figur 5.13 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmålingslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



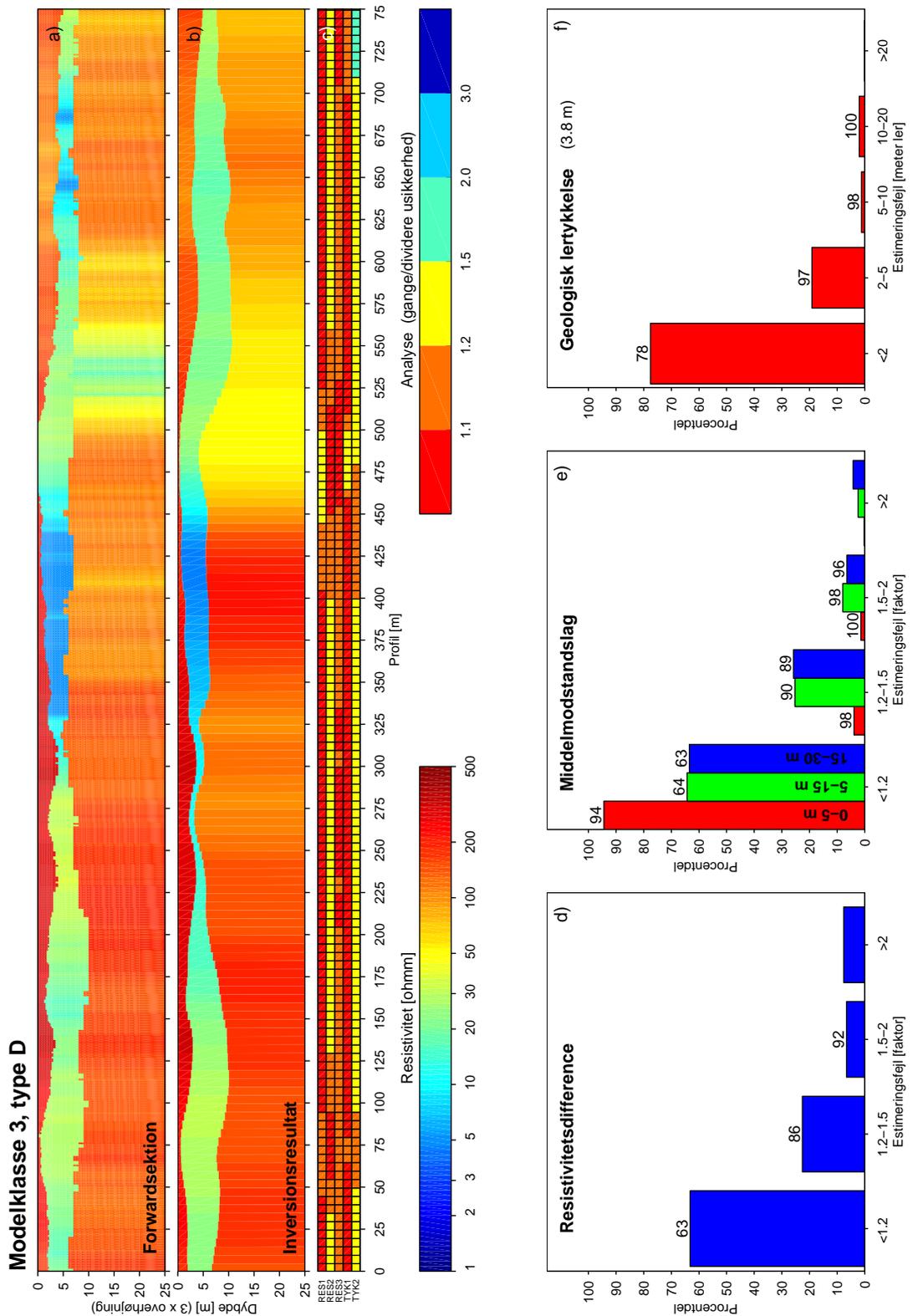
Figur 5.14 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfej. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



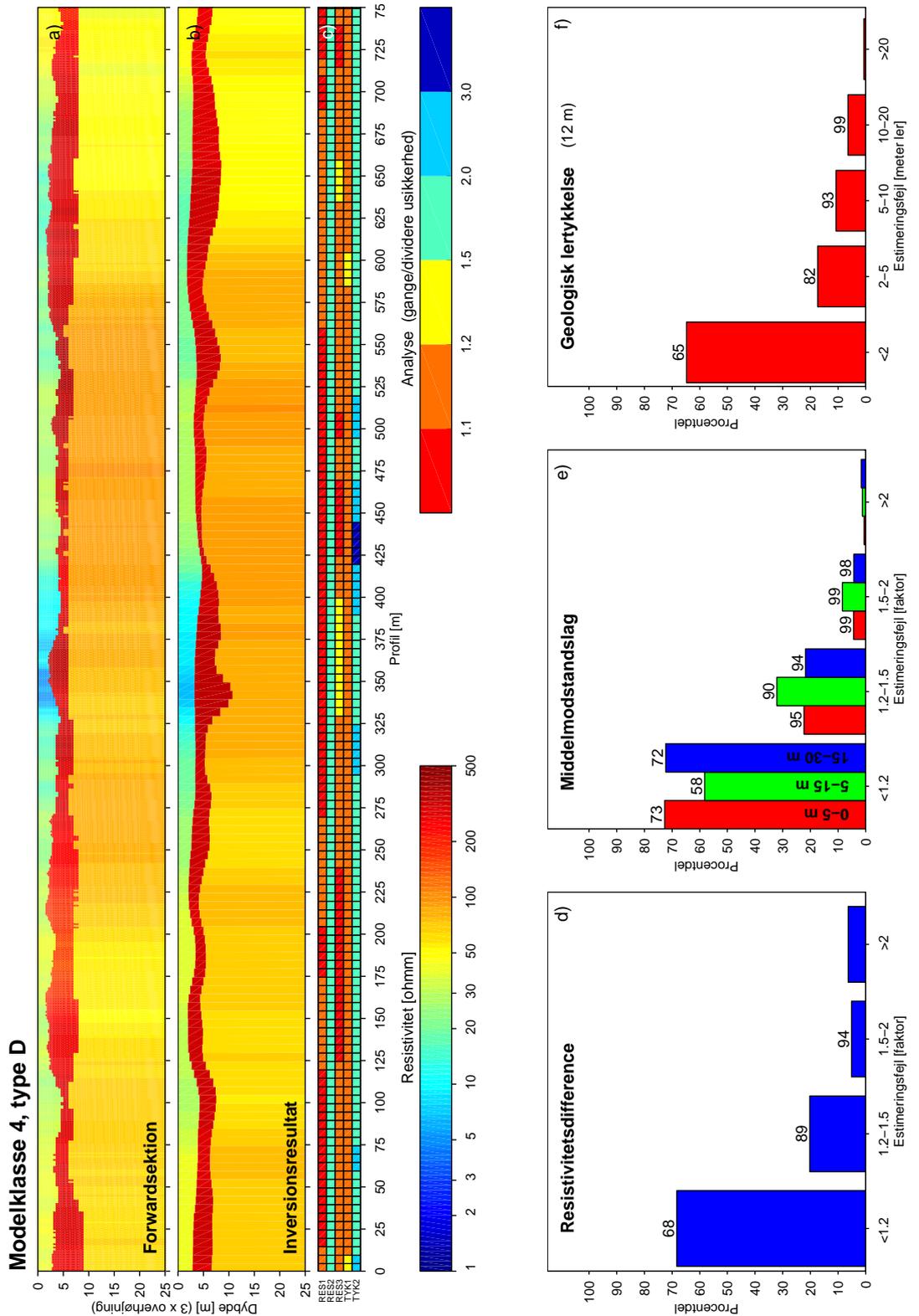
Figur 5.15 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



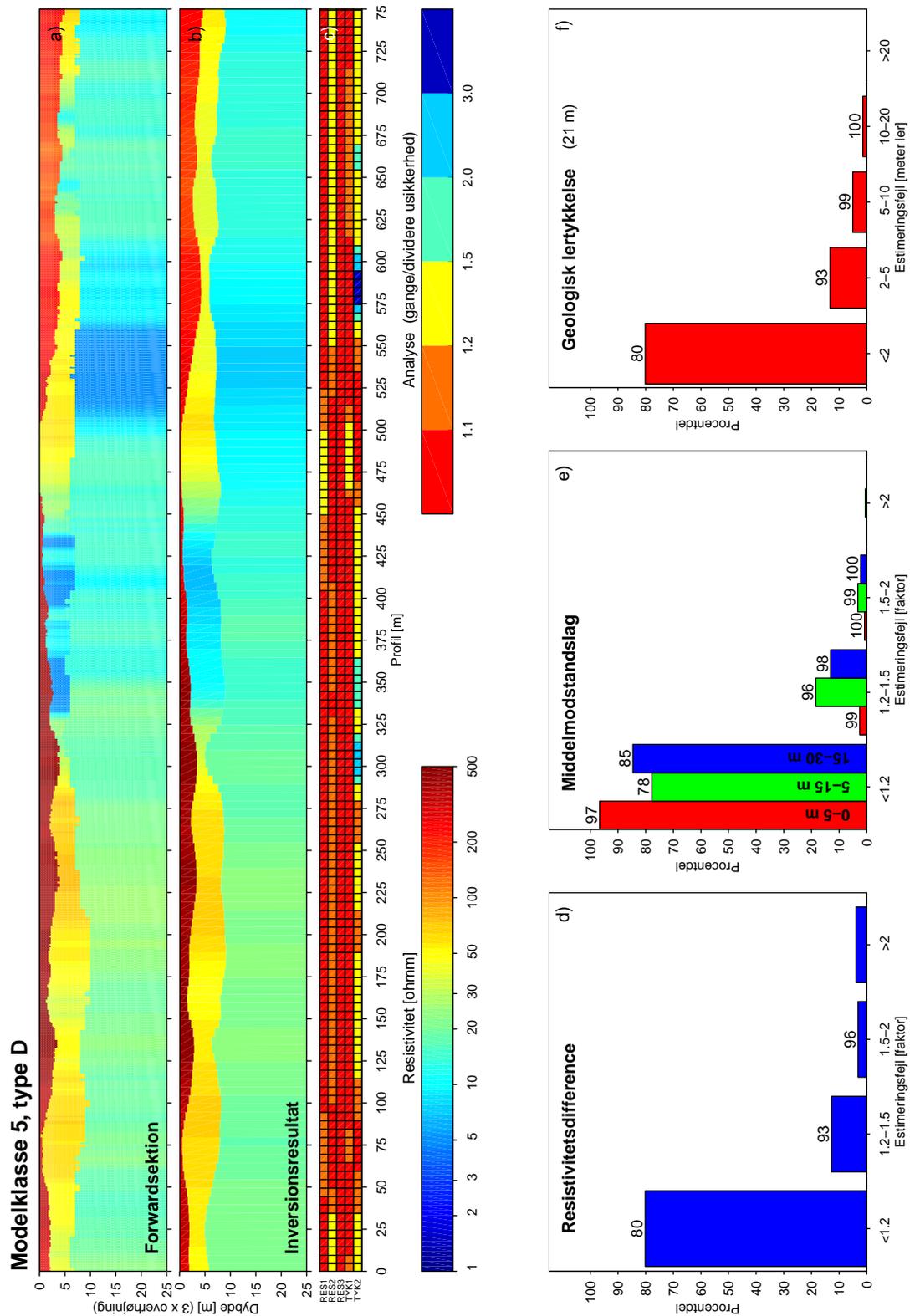
Figur 5.16 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



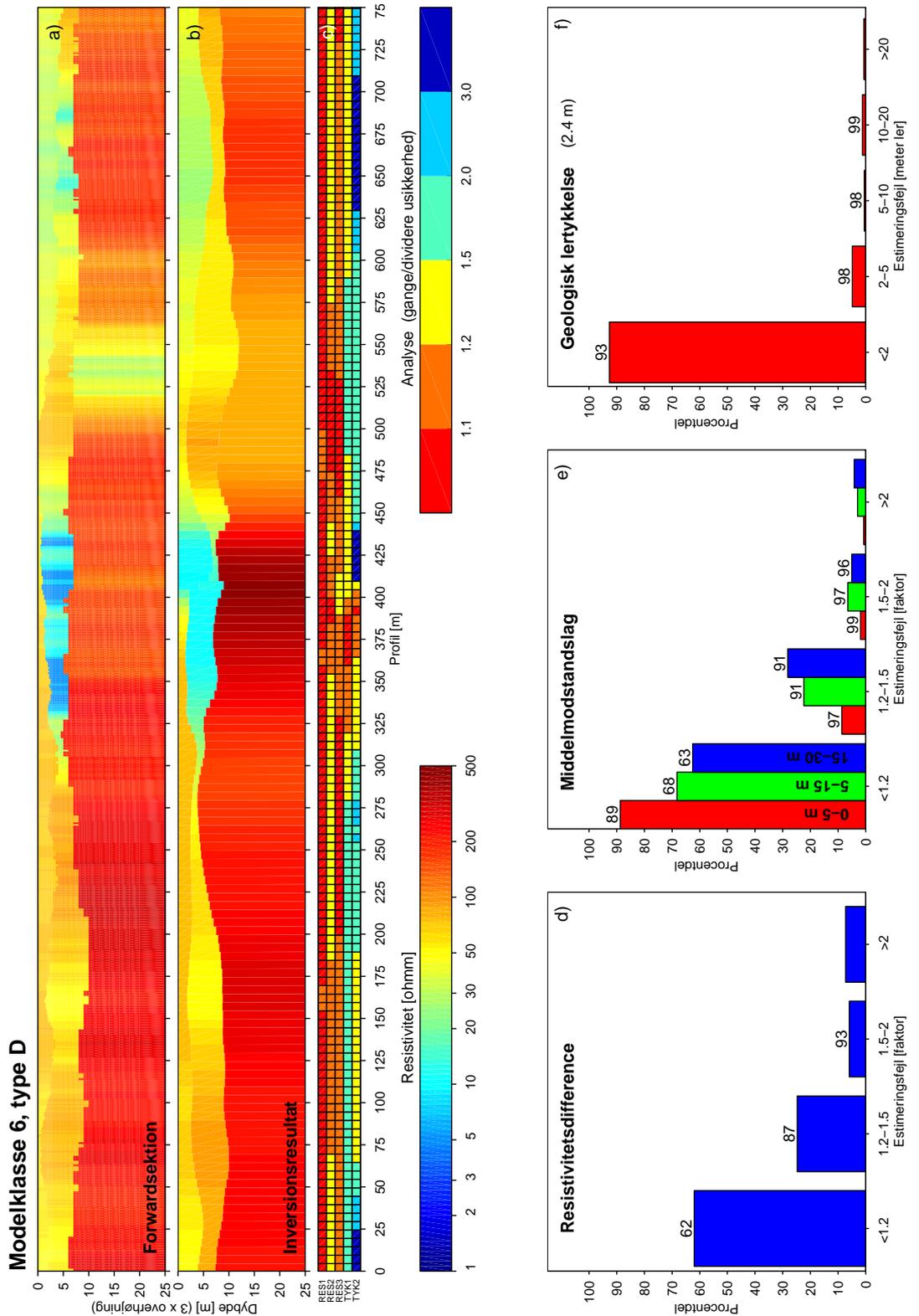
Figur 5.17 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



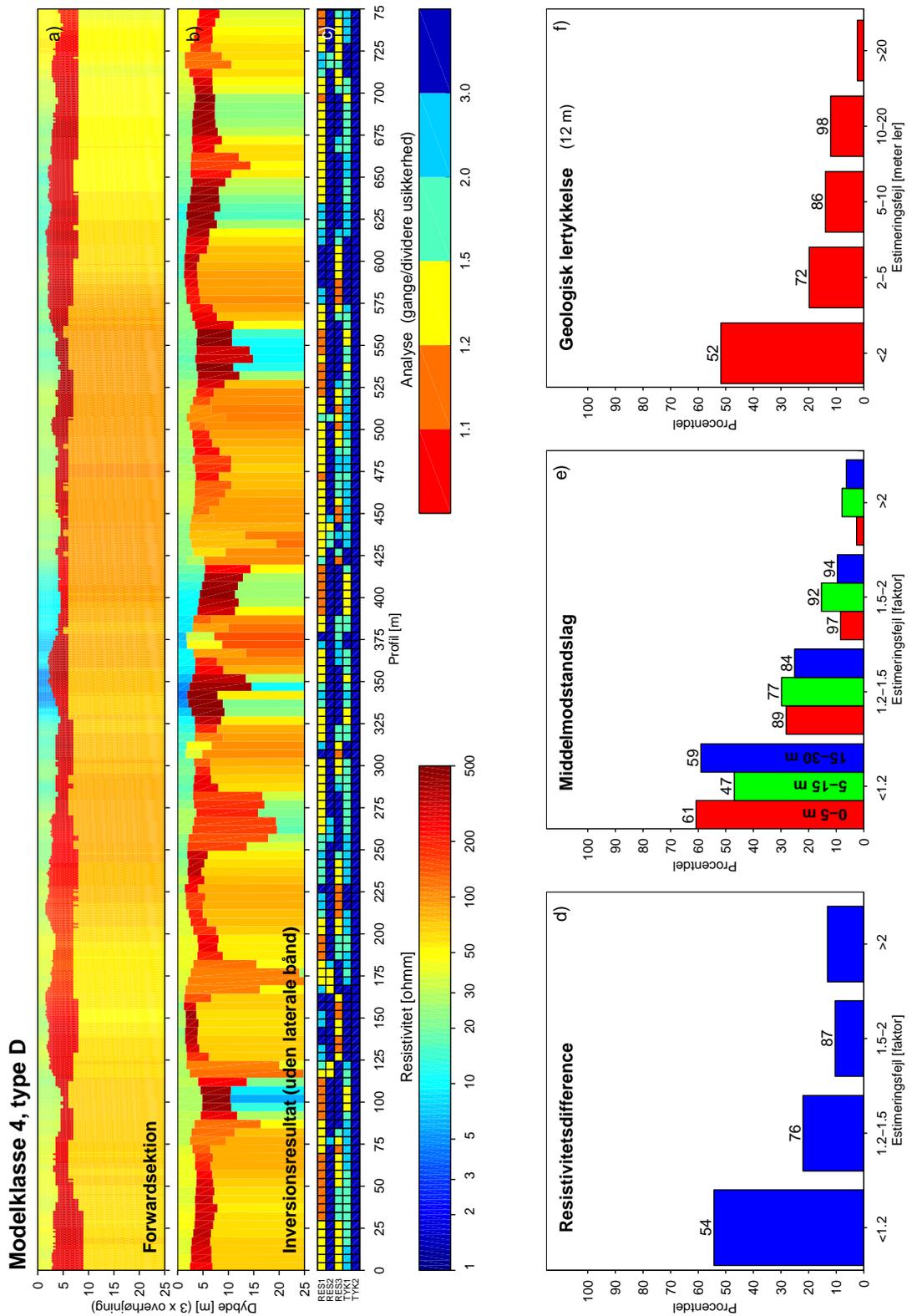
Figur 5.18 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



Figur 5.19 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmønstre - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



Figur 5.20 a) Udsnit af forwardsektion. b) LCI-inversionsresultat. c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmådsstandslag - procentdel af laget med en given estimeringsfejl. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.



Figur 5.21 a) Udsnit af forwardsektion. b) Inversionsresultat (uden laterale bånd). c) Analyse - modelparametre. d) Procentdel af modstanden i sektionen, der estimeres med en given fejl. e) Estimering af de 3 middelmodstandslag. f) Estimering af den geologiske lertykkelse.

6 OPSUMMERING

LCI-metoden frembringer tolkningsresultater indeholder de overordnede geologiske træk fra de anvendte syntetiske scenarier (forwardsektionen).

Ved LCI metoden sker vægtning af data og de laterale bånd på en ønskelig måde. Således falder de laterale båndes indflydelse i inversionsfasen når data opløser modellen godt og omvendt.

Ved en række tests blev det fastslået, at laterale bånd på modstandene og dybderne er mest optimale. Med en sonderingstæthed på 5 m er bånd på 1,1-1,3 fornuftige størrelser.

Ved test på modelsektioner med forskellige laghældninger har det vist sig, at hverken midling af data eller de laterale bånd bevirker begrænsninger i, hvor stejl en laghældning, der kan estimeres. Det er derimod den éndimensionale tolkningsmodel, der er den begrænsende faktor. Den maksimale laghældning, der kan estimeres, er på ca. 10%, og denne grænse er stort set modeluafhængig. Tolkning af laghældninger stejlere end 10% resulterer i modelsektioner, hvor laghældningen udglattes, men uden væsentlig fejlestimering af modstandene. Den begrænsende faktor for laterale modstandsvariationer er lige-

ledes den éndimensionale tolkningsmodel.

LCI-tolkninger af de stokastiske modelsektioner fra de forskellige modelklasser og typer har demonstreret, at LCI-metoden resulterer i bløde realistiske tolkningsresultater. LCI-tolkningsresultatet præsenterer således information fra data på anvendelige måder til f.eks. brug i en hydrogeologisk model.

Resultaterne fra de tre sammenlægningskriterier har fastslået, at LCI-inversion fremkommer med bedre modelestimer i forhold til inversion uden laterale bånd. Estimeringsfejlen bliver generelt mindre - dog afhængig af modstandsforholdene. I tråd med dette er usikkerhederne på modelparametrene mindre for LCI-metoden.

Endvidere er det vist, at selv for modelsektioner indeholdende relativt kraftige laterale modstands- og laggrænsevariationer, fremkommer LCI-metoden med fornuftige modelestimer med den forventede glatning.

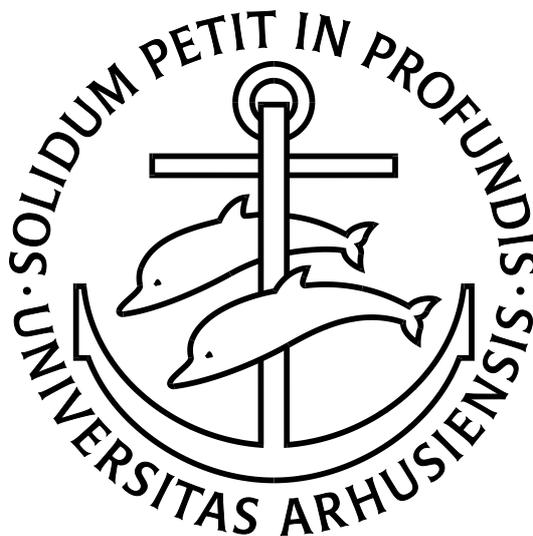
Mht. laterale variationer er LCI-metoden bedre til at håndtere kraftige modstandsvariationer end kraftigt varierende laggrænser.

BILAG 1

Foged, N., Inversion med lateralt sammenbundne modeller af 2-dimensionale stokastiske resistivitetsfordelinger, 2001, speciale afhandling, Aarhus Universitet, Geologisk Institut, Geofysisk Afdeling.

Specialeafhandlingen er vedlagt i uredigeret form. Konklusionerne i specialet er specialeforfatterens egne.

Inversion med lateralt sammenbundne modeller af 2-dimensionale stokastiske resistivitetsfordelinger



Speciale
Oktober 2001

Nikolaj Foged
Geofysisk Afdeling
Geologisk Institut
Aarhus Universitet

Forord

Dette speciale er udarbejdet som den afsluttende opgave på kandidatstudiet på Geofysisk Afdeling, Geologisk Institut, Aarhus Universitet. Specialeforløbet er foregået i tæt samarbejde med Geofysiksamarbejdet.

En tak til vejleder Kurt Sørensen for mange gode input og ideer og til Esben Auken for løbende vejledning og hjælp med justeringer i inversionskoden (EM1DINV) på baggrund af de i specialet fundne resultater. Også en tak til Bo Holm Jacobsen der har bistået med forklaringer af den til tider komplicerede inversionsteori og til Ingelise Møller for videregivelse af hendes erfaringer med den anvendte 2D-DC-forwardkode. Endelig en tak til Anders V. Christiansen for gennemlæsning og kommentering af specialet og Lise H. Rasmussen for korrekturlæsning.

Århus den 19.10.2001

Nikolaj Foged
Årkortnummer: 19950317

Indhold

1	Indledning	4
2	Elektriske metoder	6
2.1	Resistivitet som en geofysisk parameter	6
2.2	Princip for DC-målinger	8
2.3	Indtrængningsdybden	9
2.4	Tolkningsfejl	11
2.4.1	Ækvivalenser	11
2.4.2	Dimensionsfejl	12
2.5	Anvendte elektriske profileringsmetoder	13
2.5.1	Mobile elektrode arrays – PACES-systemet	13
2.5.2	Multielektrodeprofilering – MEP	16
3	Teoretisk baggrund for elektriske metoder	18
3.1	Basal DC-teori	18
3.2	Løsning af Poisson's ligning for 1D-tilfældet	19
3.3	Løsning af Poissons ligning for 2D/3D-tilfældet	20
4	Inversionsteori	22
4.1	Det lineære tilfælde	22
4.1.1	Least Squares-estimatet	22
4.1.2	Andre estimater	24
4.1.3	Variansanalysen	24
4.1.4	A priorividen og constraints	25
4.2	Det non-lineære tilfælde	26
5	Analysekriterier for LCI-inversionen af PACES-data	29
6	LCI-Inversion	31
6.1	LCI-inversion til slæbegeoelektriske data	31
6.2	LCI-inversion med EM1DINV	32
6.3	Validiteten af variansanalysen i LCI-inversionen	37
7	Generering af syntetiske DC-data	41
7.1	Diskretisering af resistivitetsmodellen	41
7.2	Behandling af data, filtrering, støj mm.	45
8	Forståelse og optimering af LCI-inversionen	48
8.1	Model resolutions-matrice	48
8.2	De laterale bånd – størrelse og type	53
8.3	Begrænsninger i laggrænsevariationer	60
8.4	Begrænsninger i laterale resistivitetsvariationer	63

9	Genkendelse af resistivitssektioner ved LCI-inversion	67
9.1	Opbygning af forwardsektionerne	67
9.2	Genkendelseskriterier	70
9.2.1	Den geologiske lertykkelse	70
9.2.2	Middelmodstand og -ledningsevne	72
9.2.3	Resistivitsdifference	73
9.3	Resultater	74
9.3.1	Eksempler på LCI-inversionsresultater	74
9.3.2	Estimering af den geologiske lertykkelse	85
9.3.3	Estimering af middelmodstandslag	92
9.3.4	Resistivitetssammenligning	98
10	Konklusion	103
A	Estimering af middelkonduktivitetsslag	108

1 Indledning

Kortlægningen af den øvre danske lagpakke med geofysiske metoder har i det senest årti være stærkt stigende. Dette skyldes primært ønsket om at sikre drikkevandsforsyningerne i fremtiden. For at opnå dette er kravene til de geofysiske undersøgelser med hensyn til detaljeringsgrad, fladedækning og rationalitet i dataindsamlingen steget. Dette har bevirket, at der både inden for det elektriske- og det elektromagnetiske område i de seneste år er blevet udviklet nye metoder, der kan opfylde kravene nutildags. Dette har i Danmark medført en udvikling af mobile systemer for de elektriske- og de elektromagnetiske metoder. For de elektromagnetiske metoder med Pull Array Transient ElectroMagnetic systemet (PATEM) (Sørensen and Effersø 1995) og for de elektriske metoder med Pull Array Continuous Electrical Profiling (PACEP) og Pull Array Continuous Electrical Sounding (PACES) (Sørensen 1996). Begge de elektriske systemer bygger på, at elektroderne trækkes hen over jorden af et køretøj, mens der måles kontinuert. De store datamængder, som de nye systemer medfører, har bevirket udviklingen af nye inversionsrutiner. De tættere og fladedækkende data, som PACES-systemet resulteter i, åbner muligheden for 2D-inversion. I Danmark varierer geologien "langsomt", så den normalt kan betragtes som værende stykvis planparallel. 2D-inversion er derfor ikke så oplagt for data fra PACES-systemet. For at udnytte den information, der ligger i de tætsamplede data, er der udviklet en 1D-inversionsrutine, hvor de enkelte 1D-modeller lateralt sammenkobles under inversionsfasen, kaldet Lateral Constraints Inversion (LCI-inversion).

Dette speciale omhandler primært en analyse af LCI-inversionsmetoden. Specialet har to formål: For det første at opnå forståelse af hvordan LCI-inversionsmetoden fungerer. Her tænkes specielt på samspillet mellem de laterale bånd og data i inversionsfasen. Efter der er opnået forståelse for de laterale sammenbindingers virkemåde, optimeres indstillingerne for disse til inversion af data fra PACES-systemet. For det andet at belyse hvor gode modelestimaterne fra LCI-inversionen er. Dette gøres ved, at der genereres syntetiske PACES-data fra stokastiske 2D-resistivitetssektioner (forwardsektion). De syntetiske data behandles- og tolkes herefter som felldata. På baggrund af en række opstillede kriterier vurderes ligheden mellem forwardsektionen og LCI-inversionsresultater.

Specialet er opbygget med tre teoriafsnit omhandlende de elektriske metoder den teoretiske baggrund for metoderne, og invers modellering. Herefter er der et par afsnit, der belyser LCI-inversion- og forwardkodens virkemåde. Der bliver blandt andet udført en række test for at demonstrere, at koderne opfører sig som ønsket. I afsnit 8 optimeres indstillingerne i LCI-inversionsrutinen, specielt med hensyn til de laterale bånd, og i afsnit 9 foretages den endelige analyse af LCI-inversionsmetoden på stokastiske 2D-modelsektioner.

Nomenklaturer:

I formler betegner kursive bogstaver skalare størrelser. Fede bogstaver betegner matricer i inversionsudtryk ellers vektorer.

∂ : Partieltafledte.

∇ : Gradient.

∇^2 : Nabla-operator.

\times : Krydsprodukt.

I: Identitetsmatricen i inversionsudtryk.

G: Jacobe-matricen i inversions udtryk.

A^T: Transponering af matricen **A**.

A⁻¹: Den inverse af den kvadratiske matrice **A**.

2 Elektriske metoder

Elektriske metoder til resistivitetskortlægning har i de sidste årtier vundet stor udbredelse især til råstofkortlægning, sårbarhedsundersøgelser af grundvandsmagasiner samt generelle miljøundersøgelser. I det følgende afsnit vil de elektriske metoders virkemåde blive gennemgået. For den mere teoretiske baggrund for de elektriske metoder henvises til afsnit 3.1.

2.1 Resistivitet som en geofysisk parameter

Med såvel elektriske- som induktive metoder kortlægges den elektriske modstand i undergrunden. Idet forskellige geologiske formationer har forskellig resistivitet, kan man med kendskab til resistivitetsfordelingen i undergrunden typisk skelne mellem ler og sand; mellem umættet- og mættet sediment og endelig mellem salt- og fersk porevand. Muligheden for at skelne mellem de ovennævnte typer kan blandt andet bidrage til viden om, hvor der er vand (umættet/mættet), afgrænsning af grundvandsmagasiner (ler/sand), hvor godt grundvandsmagasinet er beskyttet (ler/sand) og saltvandsindtrængning i grundvandsmagasiner (fersk/salt).

Resistiviteten med enheden Ωm defineres som modstanden af en $1 \times 1 \times 1$ meter terning eller ud fra Ohms lov: (2-1).

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{J}} \quad (2-1)$$

Hvor \mathbf{E} er den elektriske feltstyrke, \mathbf{J} den elektriske strømtæthed, ρ resistiviteten og σ ledningsevnen.

Resistiviteten for et materiale afhænger af mængden af frie ioner. Resistivitetområdet for geologiske komponenter spænder over mange størrelsesordener fra ca. $10^{-2} \Omega\text{m}$ til ca. $10^6 \Omega\text{m}$. Til sammenligning varierer massefylden kun en faktor 5–10, og seismiske P-bølgehastigheder varierer med en faktor ca. 6. For geologiske materialer varierer resistiviteten typisk fra $0,25 \Omega\text{m}$ (saltvand) op til ca. $2000 \Omega\text{m}$ (tørt sand/grus, tørt grundfjeld).

Geologiske formationer består af tre komponenter; luft, væske og matrix, som alle bidrager til formationsresistiviteten. Som hovedregel er det mængden af porevand – bestemt af porøsiteten og mætningsgraden – samt indholdet af lerminerale, der er afgørende for formationsresistiviteten. Vand er i sig selv ikke en god leder, men porevandet indeholder ofte stor mængde ioner, der gør det til en god leder. Archie opskrev følgende empiriske sammenhænge mellem vandmætningen (S_w), porøsiteten (ϕ), formationsmodstanden (ρ_f), formationsfaktoren (F) og porevandsresistiviteten (ρ_w):

$$\rho_0 = F \cdot \rho_w, \quad F = \frac{a}{\phi^m}, \quad S_w = \left(\frac{\rho_f}{\rho_0} \right)^{-1/n} \quad (2-2)$$

ρ_0 angiver formationsresistiviteten for 100% vandmætning. Konstanterne a , m , og n afhænger af formationstypen. a ligger normalt mellem 0,6 og 1,3, m mellem 1,2 og 2,2 og mætningsseksponten n er ca. 2. Som tilnærmelse for konstanterne benyttes ofte $a = 1$, $m = 2$ og $n = 2$. Archie's love er kun gyldige i det tilfælde, hvor ledning af strøm i sedimentet udelukkende foregår gennem porevandet, det vil sige i lerfrie sedimenter.

Lerminerale bidrager til ledningsevnen i formationen som følge af deres evne til at absorbere og frigive ioner på overfladen. Den negative lermineraloverflade bevirker, at der dannes en diffus sky af kationer omkring lerminerale. Ionerne i den diffuse sky kan let mobiliseres af et elektrisk felt, og de enkelte lerpartikler kan altså betragtes som elektrisk ledende partikler. Ionbytningskapaciteten angiver størrelsen af mobiliserbare ladninger.

Hvis lerindholdet i sedimentet kendes (V_{ler}), kan formationsresistiviteten estimeres ved at addere ledningsbidraget (X), som lerindholdet medfører, til Archie's lov for formationsresistivitet. Archie's lov inklusiv ledningsevnebidraget fra et lerindhold bliver (Ellis 1987):

$$C_0 = \frac{C_w}{F} + X \quad C_0 = \frac{1}{\rho_0}, \quad C_w = \frac{1}{\rho_w} \quad (2-3)$$

Følgende empiriske sammenhænge har vist at være fornuftige til at approksimere X -ledet i formel (2-3).

$$X = V_{ler}^2 C_{ler} \quad \text{eller} \quad X = V_{ler} C_{ler} \quad \text{eller} \quad (2-4)$$

$$X = V_{ler}^2 C_{ler} + 2V_{ler} \sqrt{\frac{C_w}{F}} \sqrt{C_{ler}}$$

I tabel 2.1 ses resistiviteten i nogle typiske danske sedimenter. Som det

Litologi	Aflejringsperiode	Resistivitet [Ωm]
Moræneler	Kvartær	30–70
Sand over GVS	Kvartær	>200
Smeltevandsler	Kvartær	10–30
Sand under GVS	Kvartær/Tertiær	60–200
Glimmerler	Tertiær/Miocæn	10–30
Glimmerler	Tertiær/Oligocæn	4–9
Søvindmergel	Tertiær	4–12
Plastisk ler	Tertiær	2,5–4
Kalk over GVS	Danien	>200
Kalk under GVS	Danien	1–200

Tabel 2.1: Resistiviteter og aflejringsperiode for typiske danske sedimenter. Modifieret efter Auken et al. (2000).

fremgår af tabellen, er der ikke entydig sammenhæng mellem resistivitet og litologi. Typiske ækvivalente tilfælde for den øvre danske lagpakke er: Vandmættet sand/grus \approx kalk (80-200 Ωm) og fedt ler \approx saltvandsholdig sandformation (1-10 Ωm). Inden for region er variationer for en given formation væsentligt mindre, bl.a. fordi porevandet oftest har de samme egenskaber i hele lagpakken. Der er således en mere specifik sammenhæng mellem resistivitet og litologi, når man betragter en region end tabel 2.1 antyder. Endvidere kan borer i måleområdet hjælpe med til at knytte en resistivitet og litologi/formation sammen.

2.2 Princip for DC-målinger

Som omtalt i afsnit 2.1 kan kendskab til resistivitetsfordelingen i undergrunden være af stor værdi. Information om resistivitetsfordelingen kan indhentes ved brug af induktive og elektriske metoder. Fælles for de elektriske metoder er, at de benytter en 4-polsopstilling – to strømeelektroder (A og B) og to potentialelektroder (N og M).

Potentialet fra en punktkilde på overfladen af et homogent, isotropt halvrum i afstanden r er givet ved:

$$\mathbf{V}(r) = \rho \frac{I}{2\pi r} \quad (2-5)$$

Potentialeforskellen over de to potentialelektroder (ΔV) for en vilkårlig 4-polsopstilling, er (Jacobsen 1997):

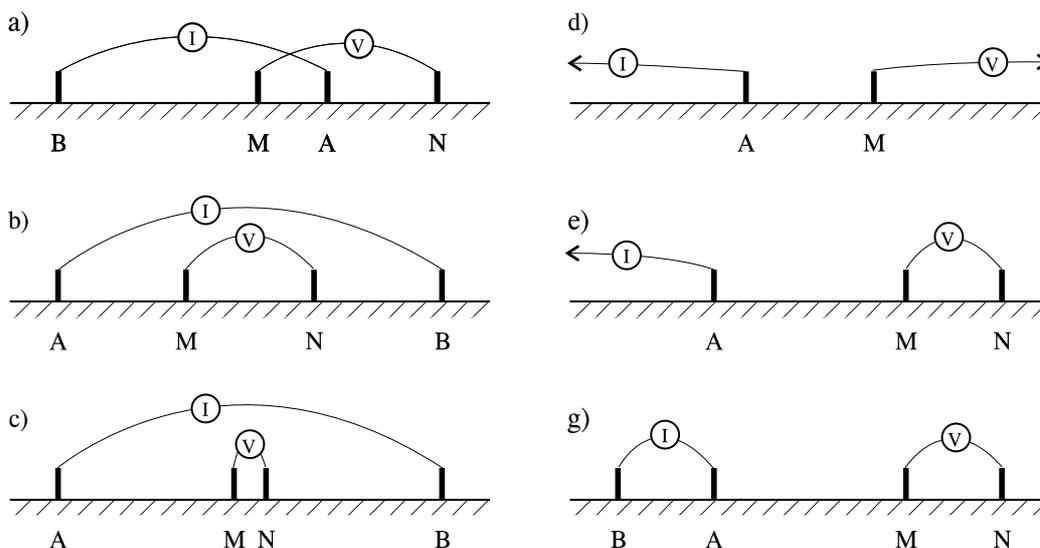
$$\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \quad (2-6)$$

hvor for eksempel AM er afstanden mellem strømeelektroden A og potentialelektroden M . Da det målte potentiale sjældent stammer fra et homogent halvrum omregnes dette oftest til tilsyneladende resistivitet (ρ_a). Omskrives ligning (2-6) fås:

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{I} 2\pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right)^{-1} = \frac{\Delta V}{I} K \quad (2-7)$$

hvor K angiver den geometriske faktor. Den tilsyneladende resistivitet afhænger altså af det målte potentiale (ΔV), den udsendte strøm (I) og opstillingens geometri udtrykt ved den geometriske faktor (K). For et homogent halvrum er den tilsyneladende resistivitet lig med halvrumresistiviteten.

De mest almindelige målekonfigurationer for de geoelektriske metoder er: Wenner, Schlumberger, pol-pol, pol-dipol, og dipol-dipol, (se figur 2.1). Til



Figur 2.1: Elektrodekonfigurationer. a: Generel opstilling. b: Wenner. c: Schlumberger. d: Pol-pol e: Pol-dipol. f: Dipol-dipol. (Møller 1999)

profilerings anvendes traditionelt Wenner-konfigurationer, mens Schlumbergerkonfigurationer oftest anvendes ved sonderinger. Både Wenner- og Schlumbergerkonfigurationer resulterer i et godt signal-støj forhold. Pol-dipol, og dipol-dipolkonfigurationer benyttes ofte ved IP-målinger¹ og er ikke så følsomme over for elektromagnetisk kobling (Møller 1999).

2.3 Indtrængningsdybden

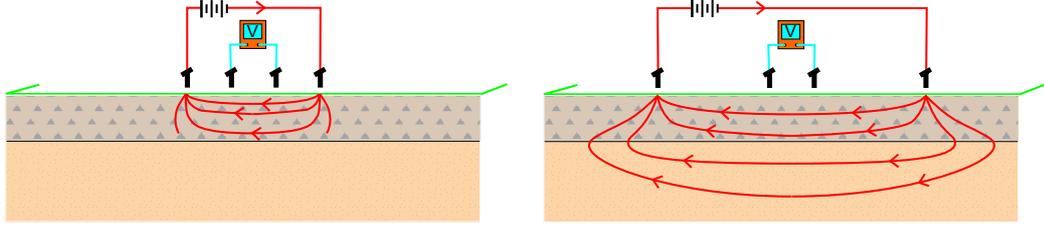
Indtrængningsdybden for de geoelektriske metoder afhænger i høj grad af geometrien i opstillingen samt jordmodellen. Generelt vil en større afstand mellem strøm- og potentialelektroderne resultere i en større indtrængningsdybde som illustreret i figur 2.2.

Frechetkernen eller de frechet-afledte angiver, hvor en given opstilling har sin følsomhed. Frechetkernen for en pol-pol opstilling på et homogent halvrum med strømkilden i $C = (0, 0, 0)$ og potentialet målt i $P = (a, 0, 0)$ kan beregnes ud fra de 3D-frechet-afledte givet ved (Møller 1999):

$$\frac{\partial \Delta V_{pp}(0, a)}{\partial \rho(x, y, z)} = \frac{I}{4\pi^2} \cdot \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (2-8)$$

Hvor V_{pp} er potentialet for opstillingen, ρ resistiviteten og (x, y, z) koordinater i jorden. Ovenstående ligning udtrykker potentialet og skal jf. ligning (2-7)

¹IP: Induced Polarization. Tidsseriemåling af hvordan potentialet henfalder i jorden efter påførelse af en elektrisk spænding.



Figur 2.2: Indtrængningsdybden øges med stigende elektrodeafstand. Til venstre løber hovedparten af strømmen i det øverste lag, mens strømbilødet til højre er trængt længere ned. (Auken et al. 2000)

normeres med K/I for at omsættes til en tilsyneladende resistivitet. Følgende udtryk for de 3D-frechet-afledte opnås, idet $K = 2\pi a$ for en pol-pol opstilling.

$$\frac{\partial \Delta V_{pp}(0, a)}{\partial \rho(x, y, z)} = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (2-9)$$

De 2D-frechet-afledte kan findes ved analytisk integration i y -retningen af udtrykket for de 3D-frechet-afledte (ligning (2-9)) og følgende udtryk opnås (Møller 1999):

$$x < a/2$$

$$\frac{\partial \Delta V_{pp}(0, a)}{\partial \rho(x, z)} = \frac{a}{\pi\beta} \left[\frac{\mathbf{K}(q_1) - \mathbf{E}(q_1)}{\beta^2 - \alpha^2} - \frac{ax [(\beta^2 - \alpha^2)\mathbf{E}(q_1) - 2\alpha^2\mathbf{K}(q_1)]}{\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2)^2} \right] \quad (2-10)$$

$$x = a/2$$

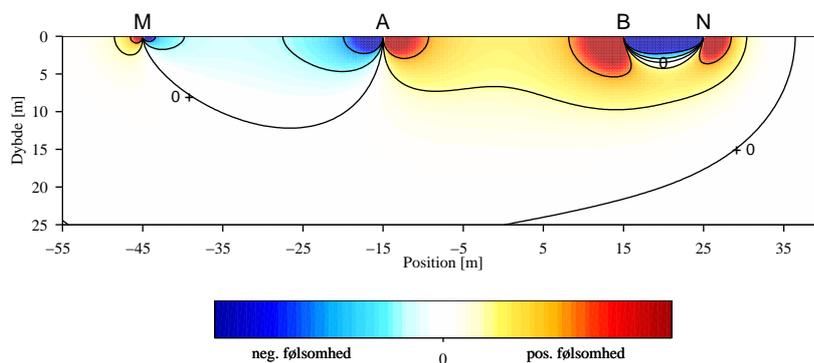
$$\frac{\partial \Delta V_{pp}(0, a)}{\partial \rho(x, z)} = \frac{a}{4} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{2(x^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (2-11)$$

$$x = a > 2$$

$$\frac{\partial \Delta V_{pp}(0, a)}{\partial \rho(x, z)} = \frac{a}{\pi\alpha\beta^2} \left[\frac{\alpha^2\mathbf{E}(q_2) - \beta^2\mathbf{K}(q_2)}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{ax [(\beta^2 + \alpha^2)\mathbf{E}(q_2) - 2\beta^2\mathbf{K}(q_2)]}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \right] \quad (2-12)$$

hvor $q_1 = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)/\beta^2}$, $q_2 = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)/\alpha^2}$, $\alpha^2 = x^2 + z^2$, $\beta^2 = (x-a)^2$ og \mathbf{K} og \mathbf{E} er elliptiske integraler af første og anden orden.

Frechetkerner for en 4-polsopstilling kan findes ved superposition af de fire potentialebidrag, der indgår. På figur 2.3 ses et plot af frechetkernen for en dipol-dipol opstilling beregnet ved hjælp af ovenstående formler (kanal 4 for PACES-slæbet i figur 2.6). Som det fremgår af figuren, er der negativ følsomhed mellem et sæt strøm- og potentialeelektroder. Ligeledes ses det, at



Figur 2.3: Fréchetkernen for en 4-polsopstilling på et homogent halvrum med strømelektroderne (A og B) i -15 og 15 og potentialelektroderne (M og N) i -45 og 25 meter.

den største følsomhed ligger ved de to tætstående elektroder (B og N). Som det fremgår af ligning (2-10) skalerer følsomheden i afstanden mellem elektroderne (a). Ud fra kendskab til Fréchetkernen kan der opstilles en række tommelfingerregler: For Wenner-opstillinger vil den målte tilsyneladende resistivitet være et udtryk for en midling af resistiviteten i dybdeintervallet 0,1 til 0,75 gange a -afstanden med hovedvægt på resistiviteten i dybden 0,3 gange a -afstanden. Tilsvarende for en Schlumberger-opstilling vil den tilsyneladende resistivitet være en midling af resistiviteten i dybdeintervallet 0,1 til 0,5 gange $L/2$ -afstanden med størst vægt på resistiviteten i dybden 0,25 gange $L/2$. (Christensen 1987).

2.4 Tolkingsfejl

2.4.1 Ækvivalenser

Som omtalt i afsnit 2.1 er der ikke en entydig sammenhæng mellem data-rummet og modelrummet. Data vil altid være påhæftet en vis usikkerhed og vil således, udover en måleværdi, også indeholde et skøn over usikkerheden herpå. I inversionsfasen vil dette medføre, at flere forskellige modeller kan tilpasse data inden for datausikkerheden, hvilket giver ækvivalensproblemer. Ækvivalensstyperne for DC-sonderinger er (Christensen 1987):

- **Højmodstandsækvivalenser**

- Optræder, når et højmodstandslag ligger imellem lag med lavere resistivitet.
- Kun produktet af tykkelse og modstand kan bestemmes for det pågældende højmodstandslag. Højmodstandslaget træder dog ud af ækvivalensen, hvis det opnår en vis tykkelse.

- **Lavmodstandsækvivalenser**

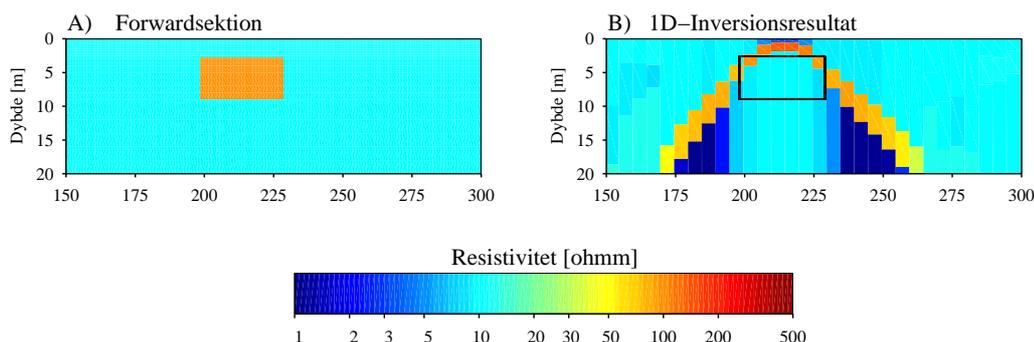
- Optræder, når et lavmodstandslag ligger imellem lag med højere resistivitet.
- Kun forholdet mellem tykkelse og modstand kan bestemmes for det pågældende lavmodstandslag. Lavmodstandslaget træder dog ud af ækvivalensen, hvis det opnår en vis tykkelse.

- **Lagundertrykkelse**

- Optræder når enkelte lag er så tynde, at de ikke giver væsentligt udsving i ρ_a -kurven og kan derfor ikke påvises ved inversionen.

2.4.2 Dimensionsfejl

En anden type tolkningsfejl opstår som følge af, at data ikke opfylder de forudsætninger, der antages under inversionen – de såkaldte dimensionsproblemer. Slæbegeoelektriske- og MEP²-data bliver oftest tolket med en endimensionel model under forudsætning af homogene, isotrope og planparallelle lag. Forhold som aldrig opfyldes helt, da jorden altid har 2D- og 3D-strukturer. I figur 2.4 ses effekter fra en 1D-tolkning af en udpræget 2D-modelsektion. De skrå faner ud fra kassen i inversionsresultat skyldes, at sonderingerne ved siden af kassen er påvirket af kassens lavere resistivitet. Det fejlagtige lavmodstandslag placeres dybere ned væk fra kassen, idet afstanden til kassen bliver større. 2D-effekterne i figuren kaldes bukseben.



Figur 2.4: Inversion af syntetiske PACES-data. A: Forwardsektion med 10 Ωm kasse i et 100 Ωm halvrum. B: Inversionsresultat – sammensatte 1D-tolknninger.

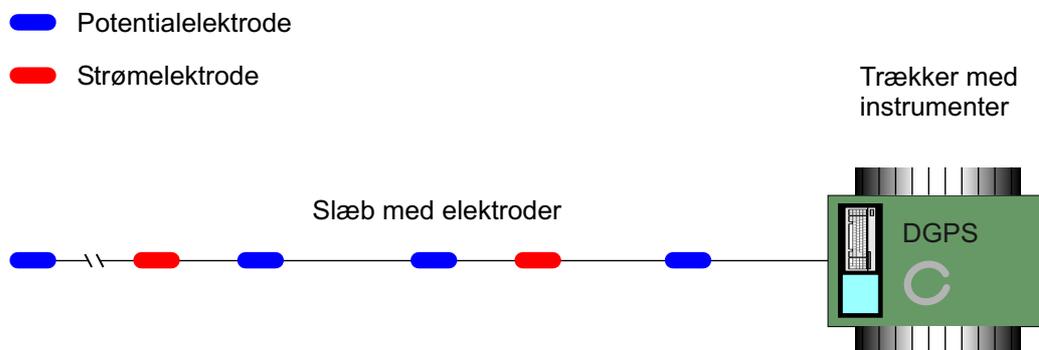
²MEP: Multi Elektrode Profilering. Omtales også som CVES: Continuous Vertical Electrical Sounding.

2.5 Anvendte elektriske profileringsmetoder

Den traditionelle geoelektriske målemetode er med jordspyd i 4-pols opstillinger enten i Wenner-konfigurationer til profilering eller i Schlumberger-konfigurationer til sonderinger. Begge er meget tidskrævende metoder. Senere er der introduceret MEP og PACES, som begge er langt mere rationelle metoder med hensyn til feltarbejdet. I det følgende afsnit gennemgås kort virkemåden i de mest anvendte geoelektriske profileringsmetoders, med hovedvægten lagt på den slæbegeoelektriske metode.

2.5.1 Mobile elektrode arrays – PACES-systemet

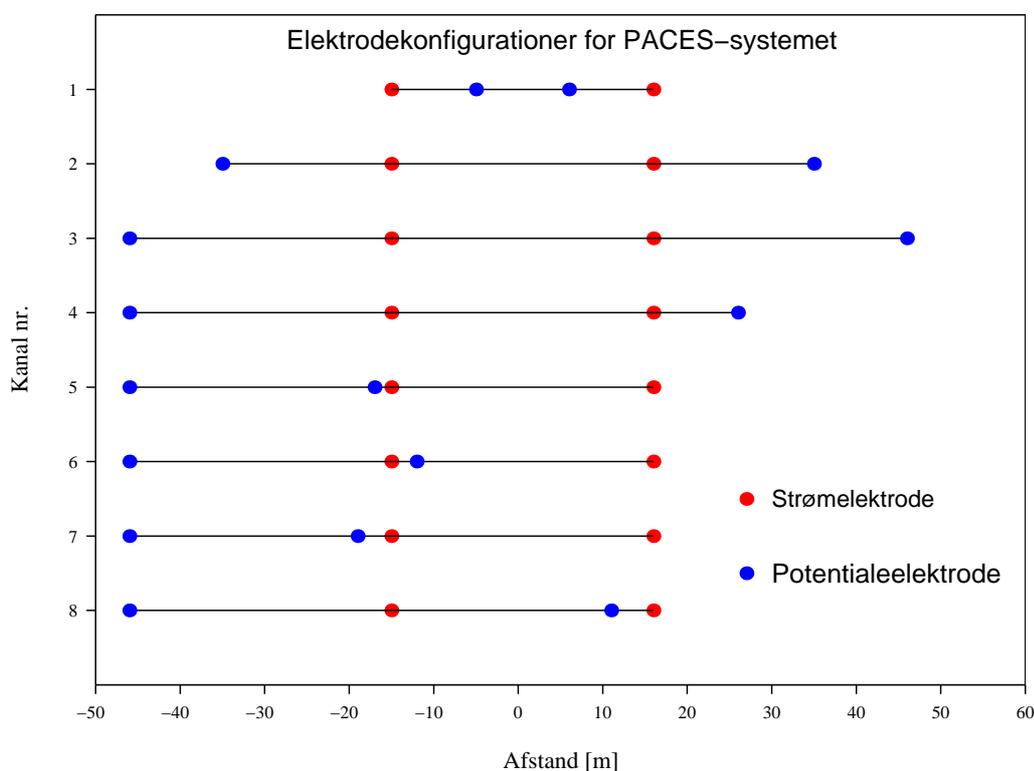
Ønsket om en mere rationel dataindsamling førte til, at der i slutningen af 80'erne blev indledt et samarbejde mellem Geofysisk Afdeling, Aarhus Universitet og Skov- og Naturstyrelsen om udviklingen af et slæbegeoelektrisk udstyr. Samarbejdet førte til, at der i starten af 90'erne blev introduceret et 3-kanals slæbegeoelektrisk udstyr (PACEP, Pulled Array Continuous Electrical Profiling), bestående af Wenner-konfigurationer med a-afstande på 5–30 meter (Sørensen and Pedersen 1992). Udstyret er i de senere år udbygget til et 8-kanals slæb (PACES), men bygger stadig på de samme principper med strømudsendelse fra elektroder, der slæbes hen over jorden af et bæltekøretøj. Siden 1988 er der således kørt over 10.000 km. profil i Danmark.



Figur 2.5: PACES-udstyret. Trækker med måleinstrumenter og elektrodeslæbet. (Auken et al. 2000)

På figur 2.5 ses en principskitse af PACES-udstyret. Udstyret består i dag af et dieseldrevet bæltekøretøj (1.8×0.8×1 m.) med måleinstrument og datalogger og det ca. 100 meter lange elektrodearray. Udstyret betjenes af to personer, som kan udføre 10–15 km. profil pr. dag afhængig af lokalitetens terrænmæssige beskaffenhed. Køretøjet er fuldt terrængående, og med 2 køreramper er det muligt at krydse små bække og diger. Elektrodearrayet er forsynet med to strømelektroder, 11 potentialelektroder, samt en jordelektrode. For at opnå god jordkontakt, som er essentiel for datakvaliteten, er

vægten af elektroderne oppe på ca. 10 kilogram pr. styk. De 11 potentiale-elektroder kombineres sådan, at der opnås de otte målekonfigurationer vist i figur 2.6. Kanal 1, 2 og 3 i figuren genkendes som Wenner-konfigurationer med a -afstande på henholdsvis 10, 20 og 30 meter. De øvrige konfigurationer er dipol-dipol-lignende konfigurationer. Elektroderne er placeret således, at følsomheden for de otte konfigurationer er fordelt nogenlunde jævnt med dybden. Konfigurationer med a -afstande på 30 meter og mindre giver (jf. afsnit 2.3) oplysninger om resistivitetsforholdene i de øverste 25–30 meter af lagpakken.

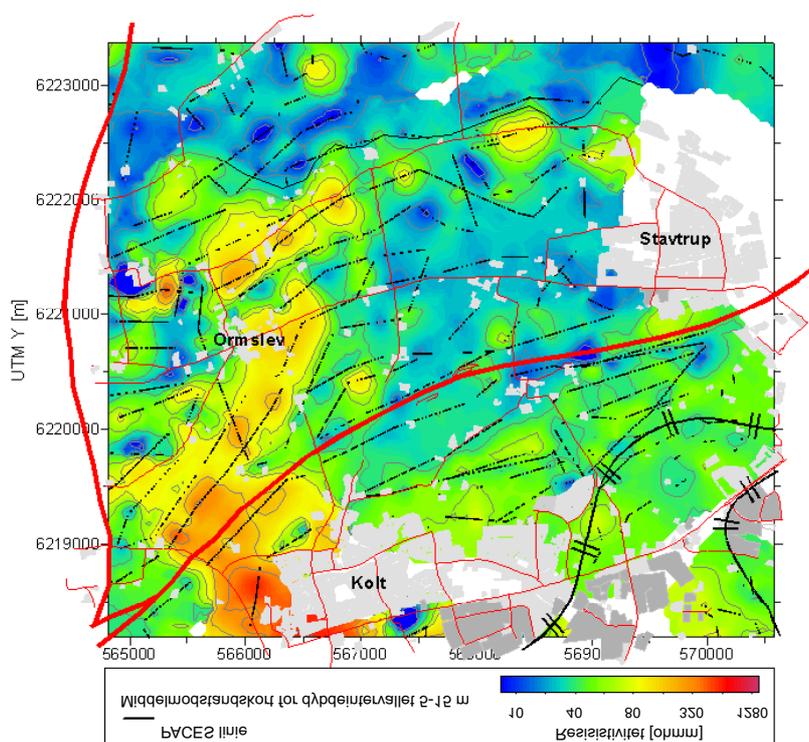


Figur 2.6: De otte elektrodekonfigurationer for PACES-udstyret. Kanal 1–3: Wenner-/invers Wenner-konfigurationer. Kanal 4–8: Dipol-dipol-lignende konfigurationer. Alle konfigurationer benytter de samme to strømelektroder.

Der måles kontinuert under kørslen, hvilket til tider kan give problemer med kontakten til jorden. Strømuksendelsen styres automatisk således, at der opnås det bedste signal-støjforhold dog med en maksimal strømuksendelse på 30 mA. Detekteringen foregår synkront for de 8 kanaler med en reverseringsfrekvens på normalt 20 Hz. Med to målinger pr. halvcyklus medfører dette 80 målinger pr. sekund pr. kanal. Data filtreres prædiktivt i tid og samples med ca. 1,2 meters mellemrum styret af et tichjul på trækkøretøjet. De relativt

lave spændinger, der registreres over potentialelektroderne, medfører, at det er nødvendigt at forstærke målesignalet med en faktor ca. 10. Sammenholdt med, at der til tider er manglende galvanisk kontakt med jorden samt slæbestøj, synes dette umiddelbart at måtte resultere i meget støjfyldte data. Dette kan den adaptive prædiktive filtrering samt den efterfølgende midling af de mange og tætte målinger dog fuldt ud kompensere for. Støjmæssigt kan data fra PACES-udstyret sidestilles med jordspydsmetoder og som standard sættes usikkerheden på data til 5%. Støjen dækker både over geologisk støj³, slæbestøj samt instrumentstøj.

Den efterfølgende databehandling omfatter yderligere filtrering og midling af data samt inversion af data til en resistivitetsmodel (mere herom i afsnit 7.2). Oftest foretages der en 1D-inversion med laterale bånd på modelparametrene – såkaldt LCI-inversion. Resistivitetsmodellerne fra inversionen præsenteres som resistivitetsprofiler og som middelmodstandskort – som vist i figur 2.7.

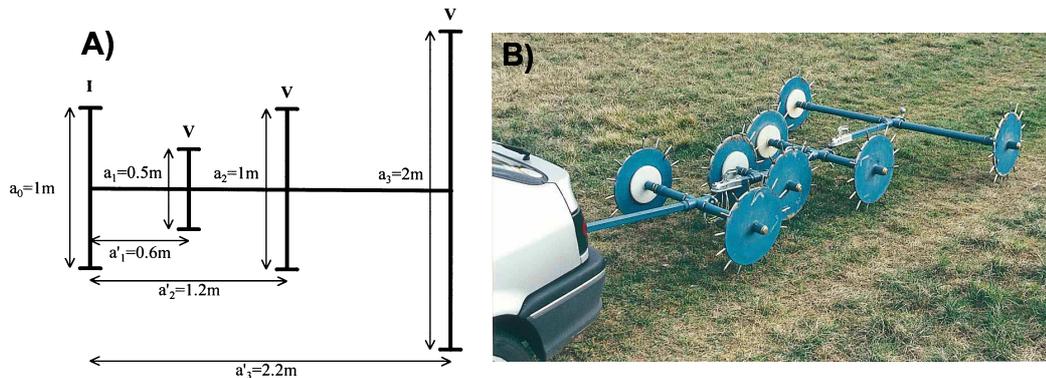


Figur 2.7: Middelmodstanden i dybdeintervallet 5–15 meter (Ormslev syd-vest for Århus). Plotområdet er $5,5 \times 5$ km. (Sørensen 1996)

Metodens styrke ligger altså i pålidelige 2–3-lagsmodeller af de øverste 25–30 meter af lagpakken. Sådanne informationer har blandt andet stor værdi

³Geologiske støj: De udsving i data der skyldes inhomogene lag og dimensionsproblemer.

med hensyn til sårbarhedsvurdering af grundvandsreservoirerne. Endvidere kan informationer fra PACES-metoden suppleret med informationer fra konventionelle 40×40 meter TEM ⁴ resultere i en velopløst resistivitetsmodel.



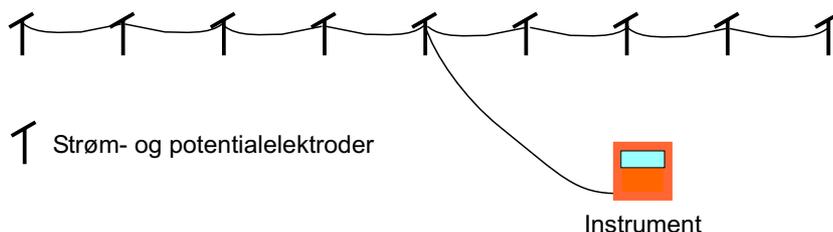
Figur 2.8: A: Coaxiale dipol-dipol-konfigurationer for Vol-de-canards MUCEP systemet. B: Prototype af elektrodeopsættet. (Panissod et al. 1998)

Også andre geoelektriske profileringsmetoder med mobile arrays er rapportert i litteraturen som for eksempel Vol-de-canards MUCEP (MULTI-pole Continuous Electrical Profiling) (Panissod et al. 1998). Dette system består af tre coaxiale dipol-dipol-konfigurationer som vist i figur 2.8. Elektroderne er udformet som pikhjul og sikrer derved en hurtig og tæt dataindsamling (ca. 20 km. profil pr. dag). Indtrængningsdybden for systemet er 2–3 meter, hvilket gør metoden egnet til arkæologiske- og geotekniske undersøgelser samt jordbundsundersøgelser.

2.5.2 Multielektrodeprofilering – MEP

MEP er en videreudvikling af traditionel geoelektrik, hvor der arbejdes med fire elektrodespyd. Når der måles med MEP, sættes en række spyd langs profillinien og spyddene forbindes til et kabel med mange kanaler som vist i figur 2.9. Ved hjælp af et måleinstrument med indbygget computer, er det herefter muligt at skifte mellem et forudbestemt antal måleopstillinger langs det udlagte kabel. Afstanden mellem spyddene afhænger af opgavens karakter. En typisk måleopstilling til grundvandsopgaver er 400 meter lang, og der måles med elektrode-opstillinger i Wenner-konfiguration med a-afstande fra $a = 5$ m til $a = 120$ m. Med en sådan måleopstilling indhentes der information om resistivitetsfordelingen ned til ca. 60 meters dybde. Ønskes en mere detaljeret opløsning af de øvre lag vælges en mindre elektrodeafstand som

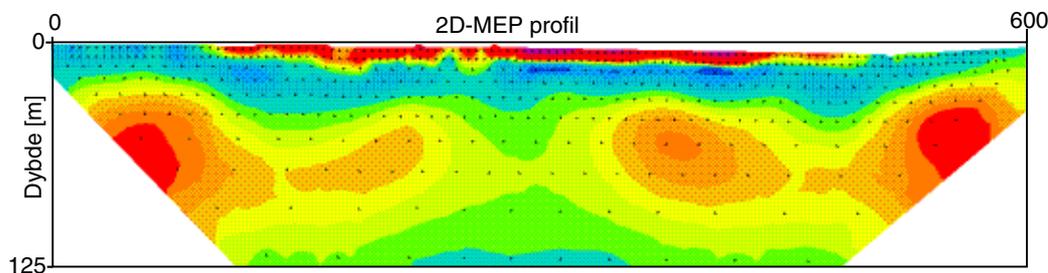
⁴ Transient ElektroMagnetisk: Sonderingsmetode i central-loop konfiguration med 40×40 meter sender-loop. Metoden er meget sensitiv overfor dybden til et lavmodstandslag.



Figur 2.9: MEP-udlæg: Jordspyddene anvendes både som potentiale- og strømlektroder styret af måleinstrumentet. (Auken et al. 2000)

for eksempel ved forureningsundersøgelser. Feltarbejdet kan normalt udføres af to personer som til fods flytter og betjener udstyret. Pr. dag kan udføres ca. 1 km. profil afhængig af udlæggets konfiguration.

Data inverteres ved en 1D LCI-inversion eller ved en fuld 2D-inversion Loke and Barker (1995). Inversionsresultaterne præsenteres normalt som profilsnit som vist i figur 2.10. Hvis undersøgelsen er planlagt således, at der er flere parallelle eller krydsende linier, kan der opnås en form for 3-dimensional visualisering af de elektriske modstande. Fladedækkende kort med gennemsnitlige modstande i dybdeintervaller er også en mulig præsentationsmåde.



Figur 2.10: Resistivitetsprofil fra 2D-inversion af MEP-data. Hver prik repræsenterer en modstandsværdi.

3 Teoretisk baggrund for elektriske metoder

3.1 Basal DC-teori

Geoelektriske målinger er baseret på måling af det elektriske potentiale, der opbygges som følge af et strøminput i jorden. Det målte potentiale indeholder således informationer om ledningsforholdene i jorden. De styrende forhold for elektromagnetikken beskrives af Maxwell's ligninger. På differentialeform ser Maxwell's ligninger ud som følgende (Ward and Hohmann 1991):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-4)$$

\mathbf{E} betegner den elektriske feltstyrke, \mathbf{B} den magnetiske feltstyrke, \mathbf{D} den elektriske forskydningsspænding, \mathbf{H} den magnetiske feltstyrke og \mathbf{J} den elektriske strømtæthed.

Det geoelektriske tilfælde kan betragtes som et *steady-state* ($\partial/\partial t = 0$) tilfælde i elektromagnetikken (Ward and Hohmann 1991). Til beregning af det elektriske potentiale i det elektriske tilfælde bruges således Faraday's lov (3-1), som i *steady-state* tilfældet kan formuleres som:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3-5)$$

og en af de konstitutive ligninger – Ohm's lov:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3-6)$$

der i den quasi-stationære approximation kan formuleres som (Ward and Hohmann 1991):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3-7)$$

Ligning (3-5) indikerer, at \mathbf{E} kan udtrykkes som gradient af et skalarfelt, hvilket medfører (Ward and Hohmann 1991):

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3-8)$$

hvor V er det skalare elektriske potentiale. Minustegnet i ligning (3-8) vidner om, at det elektriske potentiale er aftagende væk fra kilden. Ligning (3-7) er kun gældende i et kildefrit område. Indføres en punktkilde, kan ligning (3-7) skrives som (Christensen 1994):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = I\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s) \quad (3-9)$$

hvor I angiver strømstyrken af punktkilden placeret i (x_s, y_s, z_s) . Kombineres ligning (3-6) og (3-8) og indsættes i ligning (3-9) opnås følgende ligning:

$$\nabla \cdot [-\sigma \nabla \mathbf{V}] = I \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s) \quad (3-10)$$

Dette er Poisson's ligning. Den kan betragtes som en generel differentialeligning for DC-tilfældet og er gyldig i alle områder – med og uden strømkilde.

3.2 Løsning af Poisson's ligning for 1D-tilfældet

Løsninger af Poisson's ligning (3-10) og differentialeligninger generelt, kan indeles i tre trin: 1) find generelle løsninger, 2) opfyld grænse- og kontinuïtetsbetingelser, 3) opfyld kildebetingelser. Generelle løsninger til Poisson's ligning kan opnås på flere forskellige måder. I 1D-tilfældet kan der blandt andet findes generelle løsninger ved at udnytte cylindersymmetrien i problemet eller ved en Fourier-transformation af differentialeligningen fra rumdomænet til bølgetalsdomænet.

For specialtilfældet med en 1D-lagdelt jord med homogene isotrope lag og med strømkilden og potentialemåling på jordoverfladen, er potentialet \mathbf{V} givet ved (Christensen 1994):

$$\mathbf{V}(r, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3-11)$$

hvor J_0 er den 0'te ordens Bessel-funktion og $\lambda = 2\kappa\pi$ er bølgetallet. Koefficienten γ_1 findes ved rekursion op gennem lagene (Christensen 1994):

$$\gamma_m = \exp(-2\lambda d_m) \frac{\gamma_{m+1} + \psi_{m+1}}{1 + \gamma_{m+1} \cdot \psi_{m+1}} \quad (3-12)$$

$$\psi_{m+1} = \frac{\sigma_m - \sigma_{m+1}}{\sigma_{m+1} + \sigma_m} \quad (3-13)$$

ψ_{m+1} er reflektionskoefficienten ved laggrænserne. Rekursionen startes ved sidste laggrænse (L), hvor $\gamma_L = 0$.

Det horisontale elektriske felt på jordoverfladen opnås ved differentiering af formel(3-11) med hensyn til r og ved brug af relationen $\frac{\partial \mathbf{V}_0(r)}{\partial r} = -J_1(r)$ (Christensen 1994) – således:

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{V}(r, z) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{2\gamma_1}{1 - \gamma_1} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (3-14)$$

Løsninger af Poisson's ligning i dette specialtilfælde er sket ved at benytte grænsebetingelserne, $\mathbf{V} \rightarrow 0$ for $|r - r_s| \rightarrow \infty$, samt ved at ingen strømme krydser jord/luft grænsen, $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} = 0$. Endvidere skal det gælde, at potentialet skal være kontinuert over laggrænserne.

For et homogent halvrum ($\gamma_1 = 0$) opnås det i ligning (3-15) kendte udtryk for potentialet:

$$\mathbf{V}(r, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^\infty 1 \cdot J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r} \quad (3-15)$$

For at opnå en computermæssig hurtigere beregning kan udtrykket for potentialet over den lagdelte jord (3-11) omskrives til (Christensen 1994):

$$\mathbf{V}(r, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{2\gamma_1}{1-\gamma_1} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (3-16)$$

Det første led i ligning (3-16) genkendes som halvrumsresponsen, og dette led kan beregnes analytisk. Integraleleddet kan betragtes som en korrektion af halvrumsresponsen som følge af lagdelingen og beregnes numerisk. Til numeriske løsninger af integraleleddet kan anvendes digitale filtre blandt andet beskrevet af Johansen and Sørensen (1979).

3.3 Løsning af Poissons ligning for 2D/3D-tilfældet

For DC-resistivitetsmodellering findes der i litteraturen tre principielle numeriske løsningsmetoder: Integraleligningsmetoden, finite-element- og finite-difference metoderne. I forwardkoden (DCFOR2D (McGillivray 1992)), som i dette speciale anvendes til at generere 2D-forwardresponsen, benyttes finite-difference metoden. Fokus i dette afsnit vil derfor være på denne metode. Finite-difference metoden til løsning af en 2D-resistivitetsfordeling er blandt andet beskrevet af Mufti (1976) og Dey and Morrison (1979).

Udskrives Poissons ligning (3-10) i (x, y, z) -rummet opnås følgende udtryk (Dey and Morrison 1979):

$$\nabla\sigma(x, y, z) \cdot \nabla\mathbf{V}(x, y, z) + \sigma(x, y, z) \nabla^2\mathbf{V}(x, y, z) = -I\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)\delta(z-z_s) \quad (3-17)$$

Antages det, at konduktiviteten ikke varierer i y -retningen, $\frac{\delta}{\delta y}[\sigma(x, y, z)] = 0$ (2D-tilfældet) kan ligning (3-17) skrives som:

$$\nabla\sigma(x, z) \cdot \nabla\mathbf{V}(x, y, z) + \sigma(x, z) \nabla^2\mathbf{V}(x, y, z) = -I\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)\delta(z-z_s) \quad (3-18)$$

Substitueres ligning (3-18) i vektorrelationen:

$$\nabla\sigma \cdot \mathbf{V} = 1/2[-\sigma\nabla^2\mathbf{V} + \nabla^2(\sigma\phi) - \phi\nabla^2\sigma]$$

opnås (Dey and Morrison 1979):

$$\begin{aligned} \nabla^2[\sigma(x, z) \cdot \nabla\mathbf{V}(x, y, z)] + \sigma(x, z)\nabla^2\mathbf{V}(x, y, z) - \mathbf{V}(x, y, z)\nabla^2\sigma(x, y) \\ = 2I\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)\delta(z-z_s) \end{aligned} \quad (3-19)$$

Formuleringen af problemet i ligning (3-19), så det involverer ∇^2 -operatorer, gør det muligt at benytte finite-difference formulering. Potentialet \mathbf{V} og strømkilden er nu en funktion af x, y og z , mens konduktivitsfordelingen σ er en funktion af x og z . For at lette løsningen af ligningen Fourier-transformeres problemet til (x, K_y, z) -rummet og efter løsning tilbage til (x, y, z) -rummet.

Finite-difference nettet indeholdende resistivitetsfordelingen består af non-uniforme rektangulære (x, z) -celler med nodemidtpunkt midt i cellen. Det kan vises, at for hver node i nettet kan opstilles en finite-difference formulering af ∇^2 -operatorer, involverende algebraudtryk som er konstante i konduktivitet og position for cellerne, der omgiver noden. I matrix-formulering kan ligningssystemerne opskrives som (3-20) og ét inversionskridt vil resultere i værdier for potentialerne i alle nodepunkter (Dey and Morrison 1979):

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S} \quad (3-20)$$

\mathbf{C} -matricen er en blokdiagonal spars and banded-matrice og er en funktion af geometrien og resistivitetsfordelingen. Vektoren $\tilde{\mathbf{V}}$ er de Fourier-transformerede potentialer for alle nodepunkterne, mens \mathbf{S} er vektor indeholdende strømkildernes placeringer. \mathbf{S} -vektoren vil således være nul – undtaget i de noder, hvor der er placeret strømkilder. ρ_a -værdien for en given placering af potentialelektroder kan beregnes ved hjælp af formel (2-7) efter en invers Fourier-transformation af $\tilde{\mathbf{V}}$ til \mathbf{V} .

Finite-element metoden, blandt andet beskrevet af Coggon (1971), har sin styrke, når det gælder modeller med kompleks geometri. I 2D-tilfældet er resistivitetsfordelingen opbygget af et net af irregulære trekanter. Ligesom finite-difference metoden er finite-element metoden også formuleret for 3D-tilfældet (Coggon 1985) med et net bestående af tetraedre.

Integrale-metoden (Lee 1975) løser problemet ved hjælp af Green's funktioner. Ved at bruge Green's funktioner er kildesingulariteterne automatisk inkluderet og kræver derfor ikke særskilt behandling. Som for de øvrige løsningsmetoder er integrale-metoden formuleret for 2D- såvel som for en 3D-fordeling.

4 Inversionsteori

4.1 Det lineære tilfælde

Selvom det geoelektriske problem er et non-lineært problem, gennemgås i det følgende teorien for det lineære inversionstilfælde, eftersom den er principiel og med små ændringer kan anvendes iterativt på svagt non-lineære problemer.

Det inverse problem kan i det lineære tilfælde formuleres som (Jacobsen 2000),

$$\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{G}\mathbf{m}_{true} + \mathbf{e}_{obs} \quad (4-1)$$

hvor \mathbf{d}_{obs} er en vektor med de observerede data, \mathbf{m}_{true} en vektor indeholdende de sande modelparametre, \mathbf{e}_{obs} er fejlen på data, og \mathbf{G} -matricen er den såkaldte Jacobe-matrice.

4.1.1 Least Squares-estimatet

Som kriterie for hvilken model, der tilpasser data bedst, anvendes normalt tallet $Q(\mathbf{d}_{obs}, \mathbf{m})$. Den optimale model (\mathbf{m}_{opt}) findes således ved en minimering af $Q(\mathbf{d}_{obs}, \mathbf{m})$.

$$\mathbf{m}_{opt} = \min\{Q(\mathbf{d}_{obs}, \mathbf{m})\} \quad (4-2)$$

Den traditionelle og simpleste løsning til ligning (4-2) er en mindste kvadraters løsning (Least Squares, LSQ). Talstørrelsen Q , der skal minimeres, er i LSQ-tilfældet givet ved (Jacobsen 2000):

$$Q_{LSQ} \equiv \sum_{i=1}^N (\mathbf{d}_{obs,i} - g_i(m))^2 = \|\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G}\mathbf{m}\|^2 = \|\mathbf{e}_{misfit}\|^2 \quad (4-3)$$

hvor N er antal data, og \mathbf{e}_{misfit} er fejlen mellem den lineære afbildning og de observerede data. For det bedste modelestimat som LSQ-metoden giver (\mathbf{m}_{LSQ}), må det gælde, at:

$$Q_{LSQ}(\mathbf{d}, \mathbf{m}_{LSQ}) \leq Q_{LSQ}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad (4-4)$$

hvor \mathbf{m} er alle tænkelige modeller i modelrummet. Minimering af Q i ligning (4-3) sker ved at bestemme de afledte og sætte dem lig 0 – således:

$$\frac{\partial Q}{\partial m_j} = \frac{\partial}{\partial m_j} \left(\sum_{i=1}^N e_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N 2e_i \frac{\partial e_i}{\partial m_j} = 0 \quad , j = 1 \dots M \quad (4-5)$$

hvor M er antal modelparametre, og e_i er residuallet på det i 'te datapunkt. Residuallet på e_i er en funktion af modelparametrene M . Ligning (4-1) kan

således udtrykkes på følgende vis:

$$e_i(m_1, \dots, m_M) = d_i - \sum_{k=1}^N G_{ik} m_k \quad (4-6)$$

Ved partiel differentiation af ligning (4-6) med elementerne i modelvektor m_j opnås udtrykket i ligning (4-7), idet det ikke data ikke afhænger af modelvektoren m_j ($\partial d_i / \partial m_j = 0$).

$$\frac{\partial e_i}{\partial m_j} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j} - \frac{\partial G_{ij} m_j}{\partial m_j} = -G_{ij} \quad (4-7)$$

Indsættes udtrykket for $\frac{\partial e_i}{\partial m_j}$ fra ligning (4-7) i ligning (4-5) opnås følgende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial m_j} &= 2 \sum_{i=1}^N \left(d_i - \sum_{k=1}^M G_{ik} m_k \right) (-G_{ij}) \\ &= - \sum_{i=1}^N G_{ij} d_i + \sum_{i=1}^N G_{ij} \left(\sum_{k=1}^M G_{ik} m_k \right) = 0 \end{aligned} \quad (4-8)$$

$j = 1 \dots M$

Ovenstående system genkendes som et lineært ligningssystem med M ubekendte, der på matrix-form kan udtrykkes som (Jacobsen 2000):

$$-G^T \mathbf{d}_{obs} + G^T \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (4-9)$$

Hvis $rank(G^T G) = M$ – det vil sige, at der er lige så mange modelparametre, som der er uafhængige data – vil der netop være én løsning til ligningssystemet i ligning (4-9), som er givet ved:

$$\mathbf{m}_{LSQ} \equiv (G^T G)^{-1} G^T \mathbf{d}_{obs} \quad (4-10)$$

Er $rank(G^T G) > M$, siges problemet at være overbestemt, og der kan derfor ikke findes én eksakt løsning. \mathbf{m}_{LSQ} vil da være det bedste estimat i henhold til minimering af Q i ligning (4-3). Er $rank(G^T G) < M$, er problemet underbestemt, og \mathbf{m}_{LSQ} -estimatet vil indeholde uendelige mange løsninger. Der findes dog metoder til at håndtere underbestemte problemer blandt andet beskrevet af Menke (1989)

Ligning (4-10) kan også betragtes som en lineær invers afbildning således:

$$\mathbf{H}_{LSQ} \equiv (G^T G)^{-1} G^T \quad \mathbf{m}_{LSQ} \equiv \mathbf{H}_{LSQ} \mathbf{d}_{obs} \quad (4-11)$$

4.1.2 Andre estimater

Ofte vil LSQ-estimatet givet ved (4-10) ikke være den bedste inversionsløsning, hvilket for eksempel kan skyldes, at der er mange størrelsesordners forskel på de målte data. Der findes en række varianter af LSQ-estimatet med forskellige opfattelser af model- og data rummet. I det følgende gives varianter af LSQ-løsningen uden yderligere kommentarer (Menke 1989):

\mathbf{m}_{minL} , Minimum length estimat:

$$\mathbf{H}_{minL} = \mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} \quad \mathbf{m}_{minL} = \mathbf{H}_{minL} \mathbf{d}_{obs} \quad (4-12)$$

\mathbf{m}_{WLSQ} , Weighted least squares estimat:

$$\mathbf{H}_{WLSQ} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \quad \mathbf{m}_{WLSQ} = \mathbf{H}_{WLSQ} \mathbf{d}_{obs} \quad (4-13)$$

\mathbf{m}_{DLSQ} , Damped least squares estimat:

$$\mathbf{H}_{DLSQ} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \epsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \quad \mathbf{m}_{DLSQ} = \mathbf{H}_{DLSQ} \mathbf{d}_{obs} \quad (4-14)$$

\mathbf{m}_{BLUE} , Best linear unbiased estimate:

$$\mathbf{H}_{BLUE} = (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \quad \mathbf{m}_{BLUE} = \mathbf{H}_{BLUE} \mathbf{d}_{obs} \quad (4-15)$$

For ovenstående er \mathbf{C}_{obs} covariansmatricen for de observerede data, \mathbf{I} identitetsmatricen og ϵ størrelsen på dæmpningen.

4.1.3 Variansanalysen

Udover selve modelestimatet er man også interesseret i et variansskøn på modelestimatet. Det antages, at \mathbf{m}_{est} er konstant, samt at datafejlen (\mathbf{e}_{obs}) er en stokastisk vektor med middelværdi nul og med covariansmatrice \mathbf{C}_{obs} . Den estimerede fejl på \mathbf{m}_{est} er da en stokastisk vektor med covariansmatricen \mathbf{C}_{est} givet ved (Jacobsen 2000):

$$\mathbf{C}_{est} = \mathbf{H}_{inv} \mathbf{C}_{obs} \mathbf{H}_{inv}^T \quad (4-16)$$

For \mathbf{m}_{BLUE} vil covariansmatricen da være givet ved (Jacobsen 2000):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{BLUE} &= \mathbf{H}_{BLUE} \mathbf{C}_{obs} \mathbf{H}_{BLUE}^T \\ &= (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{C}_{obs} \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \\ &= (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \end{aligned} \quad (4-17)$$

Variansskønnet på de enkelte modelparametre er da diagonalelementerne i \mathbf{C}_{BLUE} og standardafvigelsen er kvadratroden af disse elementer.

4.1.4 A priorviden og constraints

I nogle tilfælde har man viden om \mathbf{m}_{true} fra anden side end data. For elektriske profileringer kunne det for eksempel være viden om resistivitetsfordelingen fra en boring i området. Denne viden (a priorviden) er nyttig at inddrage i modelestimatet.

Betragter vi a priorviden (\mathbf{m}_{prior}) om \mathbf{m}_{true} som et nyt datasæt kan følgende udtryk opskrives (Jacobsen 2000):

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{prior} + e_{prior} &= \mathbf{m}_{true} \\ E[e_{prior}] &= 0 \text{ (forventningsværdien af } e_{prior} \text{)}, \quad \mathbf{C}_{prior} = \{cov(e_{prior_i}, e_{prior_j})\} \end{aligned} \quad (4-18)$$

Forventningsværdien for e_{prior} antages at være nul, idet man må forvente, at \mathbf{m}_{prior} i middel er lig med \mathbf{m}_{true} .

Bånd (constraints), der styrer hvilke variationer, man vil tillade i modelrummet, kan også være nyttige at indføre i inversionsfasen. Dette kunne for eksempel være bånd på de vertikale variationer i resistivitet som ved 1D-mangelagstolkninger¹ eller som laterale bånd på modelparametrene som ved LCI-inversion. For underbestemte problemer, som 2D-inversion af DC-data oftest er, er det endvidere nødvendigt at sammenbinde de enkelte modelparametre for at reducere antallet af frihedsgrader, så problemet kan løses.

Med indførelse af bånd kan følgende udtryk opskrives:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 + e_c &= \mathbf{B}\mathbf{m}_{true} \\ E[e_c] &= 0 \text{ (forventningsværdien af } e_c \text{)}, \quad \mathbf{C}_c = \{cov(e_{prior_i}, e_{prior_j})\} \end{aligned} \quad (4-19)$$

\mathbf{C}_0 er en 0-vektor, idet "data" for båndene er, at differencen mellem to sammenbundne parametre skal være lig 0 (=ingen variation). Styrken af sammenbindingerne er da variansen på \mathbf{C}_0 og er angivet i \mathbf{C}_c . \mathbf{B} -matricen indeholder 1 og -1 for de modelparametre, der sammenbindes, og ellers 0. Analogt til indførelse af a priorviden på modelparametrene antages det, at forventningsværdien for e_c er nul.

Situationen med både a priorviden og bånd kan betragtes som følgende situation (Jacobsen 1993):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m}_{true} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{obs} \\ \mathbf{m}_{prior} \\ \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{obs} \\ \mathbf{e}_{prior} \\ \mathbf{e}_c \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Med samlet covarians-matrice \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{obs} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \mathbf{C}_{prior} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

¹1D-tolkning med faste laggrænser og relativt mange lag med vertikale bånd på resistiviteterne (Farquharson and Oldenburg 1993).

(4-20) kan omskrives til (Jacobsen 1993):

$$\mathbf{m}_{BLUE} = \left(\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} e_c \right) \quad (4-22)$$

Vi har således den fulde matrixligning for løsning af et lineært inversionsproblem indeholdende data, a priorividen og bånd.

4.2 Det non-lineære tilfælde

I det non-lineære tilfælde kan det inverse problem formuleres som følgende:

$$\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) + \mathbf{e}_{obs} \quad (4-23)$$

I modsætning til det lineære problem (4-1) er $\mathbf{g}(\mathbf{m})$ en vektor bestående af N non-lineære elementer – således:

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{m}) \\ \vdots \\ g_N(\mathbf{m}) \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

Til hvert data er der altså en non-lineær afbildning af modellen.

Det non-lineære tilfælde deles normalt op i et svagt non-lineært tilfælde og et stærkt non-lineært tilfælde. Et system karakteriseres som værende svagt non-lineært, hvis alle elementerne er differentiable med langsomt varierende partielt afledte. DC-problemet kan karakteriseres som værende et svagt non-lineært problem, og det følgende omhandler derfor kun svagt non-lineære problemer.

Kriteriet for at finde den bedste model for et svagt non-lineært problem kan direkte overføres fra det lineære tilfælde både med hensyn til LSQ-, WLSQ- og BLUE-estimer. Således er Q -tallet for BLUE givet ved:

$$Q(\mathbf{d}_{obs}, \mathbf{m}) \equiv \|\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m})\|_{\mathbf{C}_{obs}^{-1}}^2 \quad (4-25)$$

hvilket er parallelt til (4-3).

Da den non-lineære funktion $\mathbf{g}(\mathbf{m})$ er differentiable, kan den derfor lineariseres ved en Taylorudvikling omkring en estimeret model \mathbf{m}_n . Medtages kun første led i Taylorudviklingen opnås følgende approximative udtryk for $\mathbf{g}(\mathbf{m})$ (Jacobsen 2000):

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) \simeq \mathbf{g}(\mathbf{m})_n + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_n) \quad (4-26)$$

Indføres i ligning (4-26) sammenhængen $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_n$ fås (Jacobsen 2000):

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{g}(\mathbf{m}_n) + \nabla \mathbf{g} \Delta \mathbf{m} \quad (4-27)$$

hvor \mathbf{m}_n er modelkoordinatsættet tilhørende evalueringsmodellen – som er den model, hvor de partielle afledte bliver beregnet. For evalueringsmodellen er gradienten på den non-lineære afbildning $\mathbf{g}(\mathbf{m})$ lig den lineære afbildning \mathbf{G} . Ligning (4-27) kan således skrives som (Jacobsen 2000):

$$\mathbf{G} \Delta \mathbf{m} = \Delta \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{e}_{obs} = \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) \quad (4-28)$$

Jacobe-matricen (\mathbf{G}) med de partielt afledte i ligning (4-28) udtrykker altså gradienten for $\mathbf{g}(\mathbf{m})$ evalueret i \mathbf{m}_n og afhænger således af \mathbf{m}_n

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_n) \equiv \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{m}_j}(\mathbf{m}_n) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \nabla g_1(m_n) \\ \vdots \\ \nabla g_N(m_n) \end{array} \right\} \quad (4-29)$$

Parallelt med omskrivningen af ligning (4-1) til en modelestimatet i (4-10), kan ligning (4-28) omskrives til (Menke 1989):

$$\Delta \mathbf{m} = \left(\mathbf{G}(\mathbf{m}_n)^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{m}_n) \right)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{m}_n)^T \mathbf{C}_{obs} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m}_n)) \quad (4-30)$$

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \Delta \mathbf{m}$$

Startende med $n = 0$ hvor \mathbf{m}_0 angiver startmodellen. Ved iteration kan der således findes et modelestimat. Der er forskellige metoder til at få udtrykket i formel (4-30) til at konvergere - kaldet regularisering. En ofte anvendt regulariseringsmetode er Marquardt-metoden, der bygger på en lille modifikation af diagonalelementerne i \mathbf{H} -matricen i hvert iterationstrin. Regulariseringsmetoden, der anvendes i inversionskode EM1DINV (Effersø et al. 1999), (inversionskode, der anvendes til LCI-inversion), omtales i detaljer i afsnit 6.2.

Indførelsen af a priorividen og bånd i modelestimatet for et svagt non-lineært problem er analogt med det lineære problem. Modelestimatet for et svagt non-lineært problem vil da jf. formel (4-22) og (4-30) være (Jacobsen 1993):

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \left[\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} \mathbf{B} \right]^{-1} \cdot \left[\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m}_n)) + \mathbf{C}_{prior}^{-1} (\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_n) + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} (\mathbf{C}_0 - \mathbf{B}(\mathbf{m}_n)) \right] \quad (4-31)$$

Med covarians-matricen \mathbf{C}_{est} givet ved:

$$\mathbf{C}_{est} = \left[\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} \mathbf{B} \right]^{-1} \quad (4-32)$$

Der er således opstillet en iterativ løsning for et svagt non-lineært inversionsproblem indeholdende data, a priorividen og sammenbindinger af modelparametrene samt den tilhørende covariansmatrice.

5 AnalysekrITERIER for LCI-inversionen af PACES-data

Som omtalt i indledningen vil dette speciale dels omhandle en optimering af LCI-metoden, dels belyse hvor pålidelige inversionsresultaterne fra LCI-inversionen er (analyse af LCI-metoden). Analysen bygger på, at der genereres syntetiske slæbegeoelektriske data fra en 2D-resistivitetsfordeling, som derefter inverteres ved LCI-inversion og den estimerede model sammenlignes med den sande model. Ud fra dette kan det således vurderes, hvor succesfuld inversionen har været.

Følgende punkter behandles som led i ovenstående opgaver:

- 1) Test af validiteten af variansanalysen. Behandles i afsnit 6.3
- 2) Test af regnenøjagtigheden af 2D-forwardkoden (DCFOR2D). Behandles i afsnit 7.
- 3) Forståelse og optimering af de laterale bånd. Behandles i afsnit 8 og 8.1.
- 4) Undersøgelse af hvilke begrænsninger metoden og LCI-inversion medfører med hensyn til opløsning af geometriske strukturer. Behandles i afsnit 8.3
- 5) Undersøgelse af hvilke begrænsninger metoden og LCI-inversion medfører med hensyn til opløsning af laterale variationer i resistiviteter. Behandles i afsnit 8.4.
- 6) Genfindelse af forwardsektioner. Dette vurderes på tre måde: 1) Hvor godt den geologiske lertykkelse estimeres. 2) Estimering af middelmodstande i dybdeintervaller. 3) En resistivitetssammenligning punkt for punkt af forwardsektionen med inversionsresultatet. Behandles i afsnit 9.2

Punkt 1 og 2 kan betragtes som test af, om forward- og inversionskoden opfører sig som ønsket. I punkt tre forsøges det at finde de optimale indstillinger af de laterale bånd til brug i den videre analyse af LCI-tolkningsmetoden. I punkt fire og fem belyses, hvilke begrænsninger i variation i struktur og resistivitet, de laterale bånd bevirker, samt hvilke begrænsninger 1D-tolkning af 2D-modeller medfører. I punkt seks foretages der en endelig analyse af LCI-tolkningsmetoden for PACES-data.

Analysen af geoelektriske metoder med 1D-tolkninger er traditionelt blevet udført ved systematisk gennemgang af modelklasser – 2–3–4-lagsmodeller; maksimums-, minimumsmodeller; dobbelt opstigende-, dobbelt nedstigende

modeller osv. Man har ved sådan en analyse fået belyst ækvivalensproblemer, lagundertrykkelse mm. At lave en sådan analyse med 1D-syntetiske slæbedata og efterfølgende LCI-inversion vil ikke give den store mening. Dels fordi de laterale bånd ikke kommer i spil, hvis man har lag med konstant resistivitet og/eller tykkelser gennem en sektion. Dels fordi man altid får tolket sin forwardsektion med det faktiske antal lag – og ikke mindst fordi virkeligheden ikke ser sådan ud. Det er således vigtigt at teste metoden på forwardsektioner, der har stor lighed med de faktiske forhold. Dette rejser to problemer:

- Hvordan er de virkelige geologiske forhold?
- Hvordan beskriver vi dem i alle deres detaljer ?

Det må gælde, at de faktorer, som en metode er mest følsom overfor, også er de faktorer, der indhentes oplysninger om.

For forwardsektionerne, der skal bruges til at generere syntetiske data til analyse af LCI-inversionsmetoden, er det vigtigt, at de beskriver de parametre, som metoden er følsom overfor i en detaljeret grad. For DC-metoden vil det være en detaljeret beskrivelse af resistivitetsfordelingen i jorden. Endvidere er det også vigtigt, at detaljeringsgraden i forwardsektionerne er større end den tolkningsmodel, der bruges i inversionsfasen. Herved opnår man en væsentlig reduktion af de syntetiske datas afvigelse fra virkelige data set ud fra den anvendte tolkningsmodels synspunkt. Der bliver som omtalt brugt syntetiske data genereret ud fra en 2D-resistivitetfordeling til LCI-inversion med en 1D-tolkningsmodel. Ovenstående forhold er derved opfyldt, idet detaljeringsgraden i forwardsektionen er langt større end tolkningsmodellens.

Analysen af LCI-tolkningsmetoden vil ikke blive en analyse af deciderede modelklasser. Modelsektionerne til analysen vil tage udgangspunkt i modelklasser og bestå af resistivitetssektioner med kort- og langbølgede variationer genereret ud fra en stokastisk proces. Én forwardsektion vil således indeholde en række geologiske scenarier. Forwardsektionerne kan således antages at være geologisk realistiske¹. Hvor succesfuld LCI-inversionen har været, vurderes ud fra de tre nævnte kriterier.

¹Den stokastiske generering af forwardsektioner til analysen af LCI-inversionsmetoden uddybes i afsnit 9.1

6 LCI-Inversion

6.1 LCI-inversion til slæbegeoelektriske data

Ved inversion af geoelektriske data, og geofysiske målinger i det hele taget, anvendes en geofysisk tolkningsmodel. For de elektriske metoder beskriver den geofysiske model resistivitetsfordelingen i jorden. Resistivitetsmodellen, der anvendes ved inversionen, kan opstilles i 1–3 dimensioner. En 1-dimensional resistivitetsmodel vil således bestå af planparallelle lag med uendelig udstrækning i x,y -planet, en 2D-model af rektangulære kasser eller trekantede med uendelig udstrækning i y -planet og en 3D-model af kuber eller tetraeder fordelt i rummet. Resistivitetsfordelingen i jorden vil altid være mere kompleks, end den model man vælger at beskrive den med. Inversionsresultatet vil således være en middelmodstand for et givet lag/område.

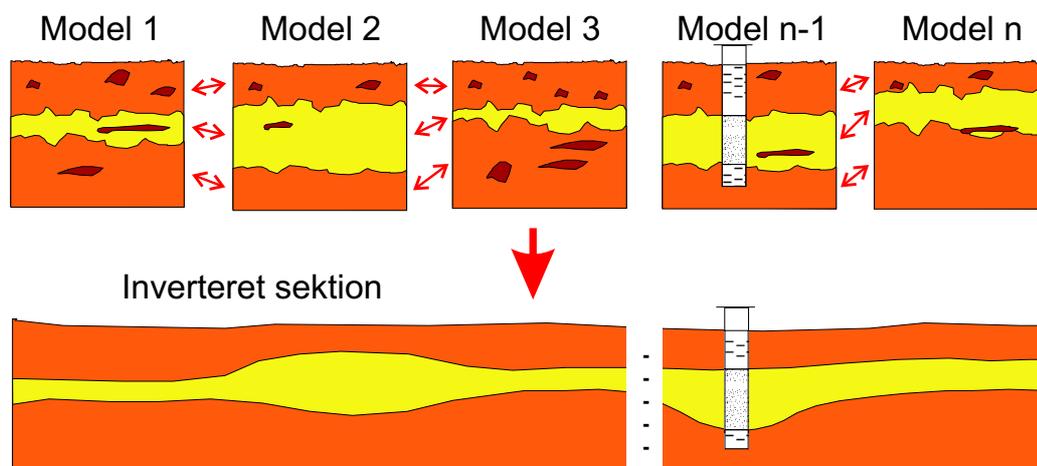
1D-tolkningsmodeller er traditionelt blevet anvendt til inversion af elektriske data målt i for eksempel Schlumberger-konfigurationer. 2D-inversion af MEP-data bliver dog rutinemæssigt anvendt. Generelt vil inversion i en højere dimension kræve flere og tættere data, forøge regnetiden samt komplicere inversionskoden.

LCI-inversion er en stykvis 1-dimensional inversion. I stedet for, at sonderingerne langs et profil tolkes enkeltvis, sammenkobles de enkelte sonderinger med laterale bånd og inverteres som ét stort ligningssystem. Denne sammenkobling af modellerne er fornuftig, hvis den opmålte geologi kan antages at variere langsomt. Som omtalt indhenter PACES-systemet oplysninger om resistivitetsfordelingen i de øverste ca. 20–30 meter. I Danmark består denne del af lagpakken primært af kvartære aflejringer i form af smeltevandsaflejringer og forskellige former for moræneaflejringer. For begge aflejringsstyper kan de laterale variationer erfaringsmæssigt antages at være langsomme. Endvidere er det i flere artikler vist, at variationer i lagtykkelse og resistiviteter kan beskrives som en stationær proces med en covariansfunktion af von Karman-typen (Pilkinton and Todoeschuck 1990). Dette stemmer også overens med filosofien bag LCI-metoden, hvor de laterale bånd netop beskrives med en covariansfunktion.

Som følge af sammenbindingerne opnås ved LCI-inversion glatte modelsektioner i tråd med antagelserne om langsomt varierende geologi som illustreret i figur 6.1. Endvidere undgår man med laterale sammenbindinger “radiator-modeller”¹, som almindelig 1D-inversion kan resultere i.

Ved LCI-inversion beskrives de laterale bånd som omtalt ved en simpel covariansfunktion. Modelrummet bliver således reduceret kraftigt, fra at nabomodellen kan antage vilkårlige værdier til kun at kunne variere inden for et

¹Radiator-modeller: Stor variation i resistivitet og/eller tykkelser på to på hinanden følgende modeller, som ikke er geologisk realistisk.



Figur 6.1: Lateral sammenbinding af modeller ved LCI-inversion. Herved opnås glatte modelsektioner indeholdende de væsentligste træk fra den underlæggende model. (Auken et al. 2000)

vist interval. Der tilføres således mere information til hver enkelt sondering, hvilket medfører bedre bestemmelser af modelparametrene.

Argumenterne for at vælge LCI-inversion til tolkning af PACES-data kan opsummeres som følgende:

- Det er fornuftigt at antage, at geologien er langsomt varierende for den øvre del af den danske lagpakke.
- LCI-inversion resulterer i glatte modeller og ikke i radiator-modeller, som almindelig 1D-inversion kan medføre, idet de laterale bånd virker
- Modelparametrene bliver væsentligt bedre bestemt end ved almindelig 1D-inversion som følge af de laterale bånd.
- PACES-data kan også inverteres 2-dimensionalt. Det kunne for eksempel være ved 2D-sharp boundary inversion som beskrevet af Smith et al. (1999) eller en minimum structure formulering (Loke and Barker 1995). Med de store datamængder, som PACES-systemet giver, er dette dog en ikke-triviell proces som vil kræve meget regnetid.

6.2 LCI-inversion med EM1DINV

I det følgende omtales specifikke forhold omkring inversionskoden EM1D-INV (Effersø et al. 1999) med hensyn til LCI-inversion af PACES-data. EM1DINV er en 1D-inversionskode, med løsning af inversionsproblemet som beskrevet i formel (4-31). Koden er designet og programmeret af Esben

Auken, Geofysiksamarbejdet, Geologisk Institut, Aarhus Universitet og kan invertere DC-data, TEM og FEM data. Det er muligt at anvende både vertikale og horisontale bånd samt indføre a priorividen om modelparametrene. For at reducere non-lineariteten foretages inversionen på logaritmen til modelparametrene og data.

Ved LCI-inversion er residualen, der minimeres, et samlet residual (total-residual) for hele modelsektionen. Totalresidualen består af et data-residual, et residual fra båndene og et a prioriresidual. Residualerne er givet som følgende:

Dataresidual (inkl. laterale bånd på dybderne²).

$$\mathbf{R}_d = \left[\sum_{i=1}^{N_d} \frac{(d_{i_{obs}} - d_{i_{est}})^2}{\mathbf{C}_{d_i}} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N_d}$$

Residual, vertikale bånd (faste tykkelser):

$$\mathbf{R}_{vc} = \left[\sum_{i=1}^{N_M} \sum_{j=1}^{(N_P-1)/2} \frac{(m_{i,j} - m_{i,j+1})^2}{\mathbf{C}_{c_{i,j}}} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N_M \cdot (N_P - 1)/2}$$

Residual, laterale bånd (for resistiviteter og tykkelser):

$$\mathbf{R}_{lc} = \left[\sum_{i=1}^{N_M-1} \sum_{j=1}^{N_P} \frac{(m_{i,j} - m_{i+1,j})^2}{\mathbf{C}_{c_{i,j}}} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(N_M - 1) \cdot N_P}$$

Totalresidual:

$$\mathbf{R}_{tot} = \frac{R_d^2 \cdot N_d + R_{vc}^2 \cdot N_M \cdot (N_P - 1)/2 + R_{lc}^2 \cdot (N_M - 1) \cdot N_P}{N_d + N_M \cdot (N_P - 1)/2 + (N_M - 1) \cdot N_P} \quad (6-1)$$

N_d : Antal data + antal laterale bånd på dybder ialt.

N_M : Antal modeller. N_P : Antal modelparametre pr. model.

Regulariseringen er essentiel for at få inversionsproblemet til at konvergere. I EM1DINV benyttes en adaptiv dæmpningsmetode. Denne metode er en marquardt-dæmpning kombineret med bånd på, hvor store step man vil tillade i modelrummet for hver iteration. Den maksimale stepstørrelse reguleres efter hver iteration, baseret på hvor succesfuld den forrige iteration har været.

²Laterale bånd på dybden indføres som data i data-vektoren. Forklaring følger i dette afsnit.

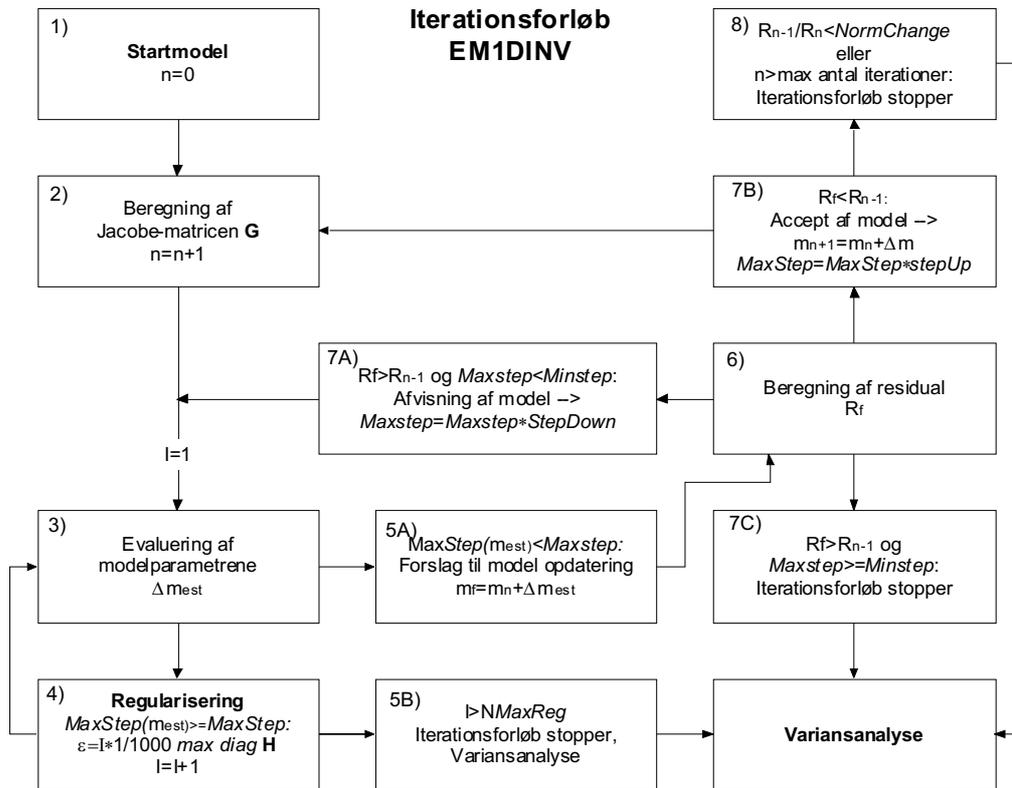
Marquardt-dæmpning bygger på, at der adderes en lille størrelse ε til diagonalelementerne i den inverse afbildning, som vist i (6-2), hvor \mathbf{I} er identitetsmatricen:

$$\left[\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} \mathbf{B} + \underbrace{\varepsilon \mathbf{I}}_{\text{Marquardt}} \right]^{-1} \quad (6-2)$$

Variansskønnet på modelparametrene er jf. (4-32) givet ved diagonalelementer i formel (6-2) uden Marquardt-ledet. Marquardt-ledet får relativt størst indflydelse på små diagonalelementer, hvilket groft sagt svarer til de dårligt bestemte modelparametre. På den måde ændres sensibiliteten for de dårligt bestemte modelparametre, mens de godt bestemte parametre forbliver næsten uændrede. Man får således afsøgt modelrummet på en rationel måde. I EM1DINV stabiliseres inversionsprocessen yderligere ved, at der er bånd på hvor stort et step, der må tages i modelrummet – MaxStep. MaxStep forøges eller formindskes for hver iteration, alt efter hvor succesfuld de forrige iterationer har været. Normalt startes der ud med et MaxStep på en faktor 1,5 – det vil sige, at man tillader en maximal ændring af modelparametrene med en faktor 1,5.

Et iterationsforløb for EM1DINV er skitseret i flowdiagrammet i figur 6.2 og forløber som følgende:

- 1) Indlæsning af data og startmodel.
- 2) Beregning af \mathbf{G} -matricen.
- 3) Evaluering af modellen.
- 4) Der dæmpes med en stadig større del af det største diagonalelement i \mathbf{H} indtil det største skridt i modelrummet for en modelparameter i \mathbf{m}_{est} er mindre en *MaxStep*. Hvis dette ikke lykkes stoppes iterationsforløbet (5B).
- 5A) Beregning af modelforslag \mathbf{m}_f .
- 6) Residual for \mathbf{m}_f (R_f) beregnes.
- 7A) Hvis modellen accepteres, forøges *MaxStep* og en ny iteration påbegyndes.
- 7B) Hvis modellen afvises, gøres *MaxStep* mindre, og der regulariseres en gang til. Hvis *MaxStep* dog bliver mindre end *MinStep* stoppes iterationsforløbet (7C).
- 8) Hvis den relative residualeændring er mindre en NormChange, eller hvis der er foretaget flere end det maksimale antal iterationer, stoppes iterationsforløbet.



Figur 6.2: Flowdiagram for iterationsforløbet i EM1DINV. *MaxStep*: Den største modelændring man tillader. *MaxDiag H*: Det største diagonalelement i **H**. *NMaxReg*: Det maksimale antal gange man øger dæmpningen. R_f : Residual for den foreslåede model. *StepUp*: Faktor man øger *MaxStep* med, hvis iterationstrinet medfører en forbedring. *StepDown*: Faktor man gør *MaxStep* mindre med hvis iterationentriken ikke medførte en forbedring. *NormChange*: mindste relative ændring i residualen for iterationsforløbet stopper.

Den adaptive regularisering i EM1DINV på ovennævnte måde gør inversionsrutinen meget robust med hensyn til, hvilken startmodel der gives.

Da inversion foregår på logaritmiske modelparametre vil usikkerheden (σ) fra analysen også være på logaritmen til modelparametrene:

$$\underbrace{\ln(\mathbf{m}) \pm \sigma}_{\text{logaritmisk rum}} \quad \overset{\curvearrowright}{\text{ikke log. rum}} \quad \exp(\ln(\mathbf{m}) \pm \sigma) = \exp(\ln(\mathbf{m})) \cdot \exp(\pm \sigma)$$

$$= \mathbf{m} \cdot \exp(\pm \sigma) \tag{6-3}$$

$$= \mathbf{m} \cdot \exp(\sigma) \text{ og } \frac{\mathbf{m}}{\exp(\sigma)}$$

For de i specialet viste analyser er omregningen i (6-3) udført. Usikkerhederne på modelparametrene vil altså være en gange/dividere usikkerhed.

Som det vil vise sig i de senere afsnit, kan det være en fordel at benytte laterale bånd på dybder i stedet for tykkelser. Da inversionen foregår på logaritmen til de primære modelparametre (tykkelser og resistiviteter), kan man ikke blot indføre a priorividen og bånd på dybder som a priorividen på summer af tykkelser, idet:

$$\log h_i \neq \sum_{n=1}^i \log t_n \quad \begin{array}{l} h_i, \text{ dybden til den } i\text{'te laggrænse} \\ t_n, \text{ tykkelsen af det } i\text{'te lag} \end{array}$$

A priorividen og laterale bånd på dybder blev under specialeforløbet implementeret i inversionskoden. A priorividen om en dybde blev indført som data $\log h_{i \text{ prior}}$ i d_{obs} vektoren. Der gælder følgende:

$$h_i = \sum_{j=1}^n m_j \quad (6-4)$$

hvor m_j er modelparametrene med tykkelserne på plads $1 \dots n$

Da a prioriværdien om dybden er indført som data, skal \mathbf{G} -matricen således også indholde afledte af dybderne h_i med hensyn til modelparametrene m_j – således:

$$\frac{\delta \log h_i}{\delta \log m_j} = \frac{m_j}{h_i} \cdot \frac{\delta h_i}{\delta m_j} = \frac{m_j}{h_i} \cdot \frac{\delta \sum_{j=1}^n m_j}{\delta m_j} = \frac{m_j}{h_i} \quad (6-5)$$

Resultatet efter det sidste lighedstegn i formel (6-5) fremkommer på følgende måde. Når m_j er en tykkelse ($j = 1 \dots n$) giver differentialekoefficienten 1 og eller 0. Rækker i \mathbf{G} -matricen vedrørende a priorividen på dybden kommer til at se således ud:

$$\mathbf{G} : \begin{bmatrix} \vdots & & & & & & & & & & \text{\scriptsize \textit{øvrigt afledte}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \vdots \\ \frac{m_1}{h_2} & \frac{m_2}{h_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \text{1. dybde a priori} \\ \frac{m_1}{h_n} & \frac{m_2}{h_n} & \frac{m_3}{h_n} & \dots & \frac{m_n}{h_n} & 0 & \dots & 0 & & & \text{2. dybde a priori} \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \frac{m_1}{h_n} & \frac{m_2}{h_n} & \frac{m_3}{h_n} & \dots & \frac{m_n}{h_n} & 0 & \dots & 0 & & & \text{ndybde a priori} \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

Da a prioriværdien opfattes som et datum, vil variansen på denne a prioriværdi være angivet i \mathbf{C}_{obs} . A priorividen om de primære modelparametre kunne i princippet implementeres på samme måde i stedet for gennem \mathbf{C}_{prior} og \mathbf{m}_{prior} .

De laterale bånd på dybder implementeres efter samme princip som a priorividen på dybder. Data i \mathbf{d}_{obs} vedrørende de laterale bånd på dybder vil da være, at differencen mellem to sammenbundne dybder skal være lig nul.

$$\mathbf{d}_{obs} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \log h_i^A - \log h_i^B = 0 \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

antagne støjniveau på data, så skal den logaritmiske afstand mellem \mathbf{m}_{est} og \mathbf{m}_{true} svare til variansskønnet fra variansanalysen³.

Undersøgelse af, om der er overensstemmelse mellem variansskønnet og den sande varians, er gjort ved MonteCarlo-simuleringer. Her genereres 1D-forwarddata fra modelsektioner med variationer svarende til størrelsen på de laterale bånd. Endvidere er der overensstemmelse mellem det antagne støjniveau og den adderede støj. Én realisation i simuleringen består således af en tilfældig genereret modelsektion indeholdende 31 2-lags modeller. Den gennemsnitlige varians på logaritmen til resistivitets- og tykkelsesdifferencerne mellem submodellerne er 0,1. Til 1D-forwardresponset adderes 5% gauss-fordelt støj. Modelsektionen inverteres med laterale bånd på tykkelser og resistiviteter på netop 0,1. Ligeledes antages der i inversionen et støjniveau på 5%. Kun én af de 31 submodeller betragtes efter inversion, de øvrige submodeller i sektionen medtages blot for at undgå randeffekter. Følgende udsagn er gældende, hvis antallet af realisationer N er stort:

$$index = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_{aktuel,i,j}}{\sigma_{est,i,j}} \right)^2 \approx 1$$

$$\sigma_{aktuel,i,j} = \log(\mathbf{m}_{est,i,j}) - \log(\mathbf{m}_{true,i,j}) \quad (6-10)$$

N antal realisationer, $j = 1, \dots, m$ modelparametre

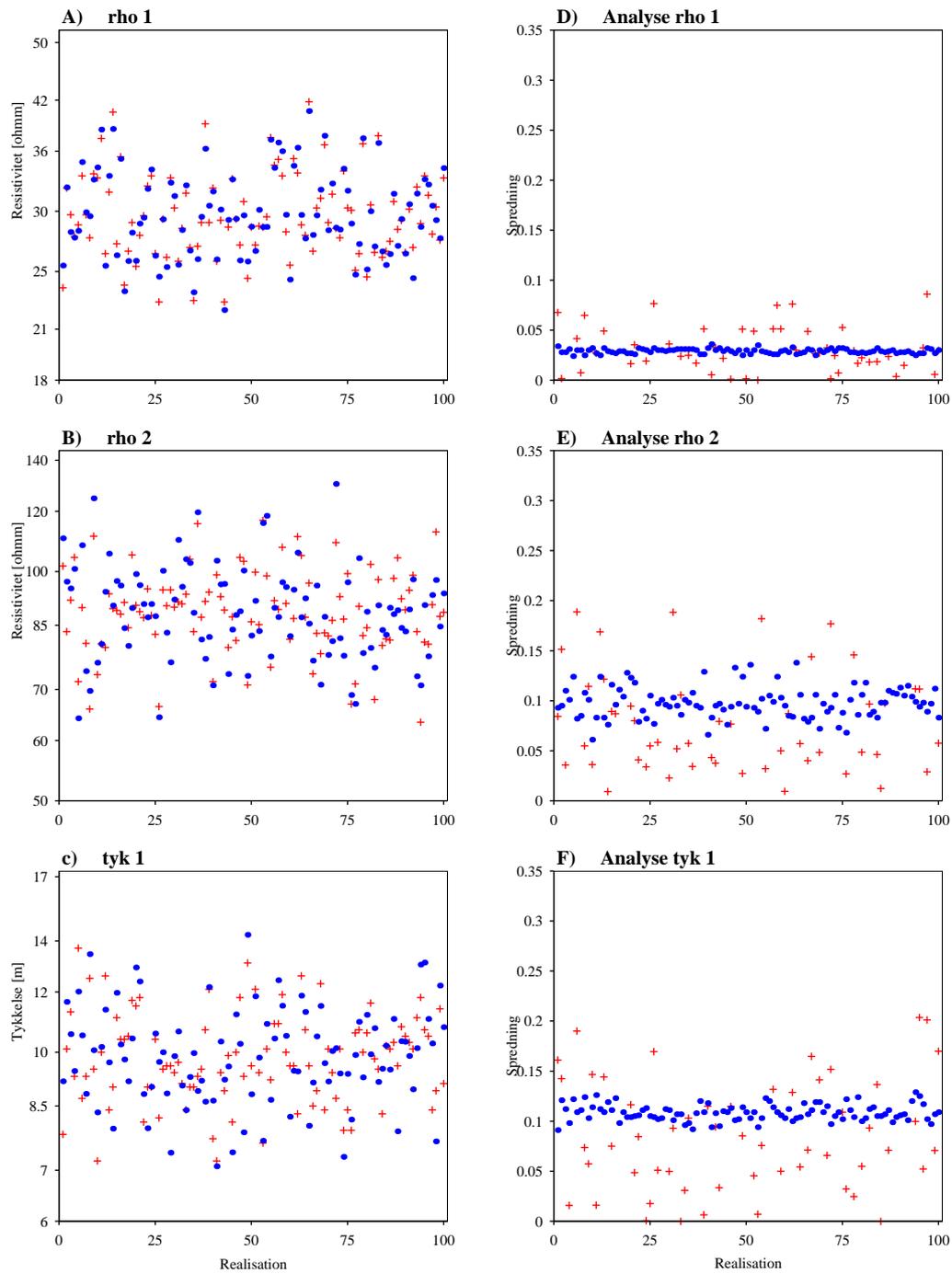
På figur 6.3 A-C ses plot af \mathbf{m}_{true} (+) og \mathbf{m}_{est} (•) for 100 realisationer. Plot D-F viser henholdsvis variansskønnet fra EM1DINV (•) og den aktuelle varians (+) for hver af de 100 realisationer.

Én gange spredning (σ_{est}) skulle gerne indbefatte 67,5% af tilfældene. Dette stemmer overens med plottene i figur 6.3 D-E, hvor σ_{aktuel} i ca. 2/3 af tilfældene er mindre end σ_{est} , svarende til at \mathbf{m}_{est} i 2/3 af tilfældene er tættere på \mathbf{m}_{true} +/- en gange spredningen. Med 1000 realisationer som beskrevet ovenfor opnås følgende indekstal (formel (6-10)) for de tre modelparametre:

$$index = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{i=1}^{1000} \left(\frac{\sigma_{aktuel,i,j}}{\sigma_{est,i,j}} \right)^2 = \left\{ \begin{array}{ll} 1,031 & \text{for } j = 1, \rho_1 \\ 0,967 & \text{for } j = 2, \rho_2 \\ 0,970 & \text{for } j = 3, tyk_1 \end{array} \right\}$$

Med en forventningsværdi for indekstallet på 1 og med $N=1000$ vil usikkerheden på indekset være givet ved $1/\sqrt{N} = 0.032$. Ovennævnte indekstal er inden for denne usikkerhed, og σ_{est} kan derfor antages at være lig med σ_{true} .

³Den logaritmiske afstand, da inversionen foregår i det logaritmiske rum.



Figur 6.3: A-C: Sammenligninger af de sande modelparametre og de estimerede for 100 realisationer. $+$ \mathbf{m}_{true} , \bullet \mathbf{m}_{est} . D-F: \bullet σ_{est} spredning fra variansanalysen. $+$ σ_{aktuel} , beregnet ved formel (6-10).

Der er således godtgjort, at variansanalysen fra inversionskoden er korrekt – under forudsætning af, at der er konsistens mellem variationerne i forwardsektionen og de laterale bånd og mellem det aktuelle- og faktiske støjniveau, samt at analysen er inden for det lineære område.

7 Generering af syntetiske DC-data

7.1 Diskretisering af resistivitetsmodellen

Til generering af 2D-DC-responser for PACES-systemet til brug i LCI-inversion blev forwardkoden DCFOR2D (McGillivray 1992) fra The University of British Columbia anvendt. Som omtalt benytter DCFOR2D et finite-difference net til løsning af Poisson's ligning (3-10). DCFOR2D genererer DC-responser fra 2D-resistivitetsfordelinger. 2D-nettet består af rektangulære celler i x,z-planet hver indeholdende en resistivitetsværdi.

Diskretiseringen af resistivitetssektionen skal selvfølgelig afspejle målekonfigurationernes følsomhed/opløsningsevne. Dels for at opnå et nøjagtigt 2D-respons, dels for at undgå unødigt regnetid. Som omtalt i afsnit 2.3 aftager opløsningsevnen med dybden, og det vil således være mest optimalt ligeledes at lade diskretiseringen aftage med dybden. Endvidere skal diskretiseringen afspejle, hvor tæt resistivitetsmodellen ønskes samlet. Endelig skal bredden af hele nettet være væsentlig større end det "interessante" område, således at grænsebetingelserne kan reduceres til at gå mod nul ved kanten af det område, hvor potentialet beregnes.

Inge Lise Møller har i sit Ph.D.-arbejde (Møller 1999) anvendt DCFOR2D og har i den forbindelse oparbejdet erfaring med diskretiseringen af resistivitsmodeller til forward-beregning med DCFOR2D. De følgende valg vedrørende opbygningen af nettet baseres til dels på denne erfaring. Ved modellering af lange profiler kan der spares regnetid og hukommelse ved at dele forwardsektionen op i mindre stykker, idet det er hurtigere at løse flere mindre lignings-systemer end at løse et stort. Under genereringen af 2D-responset stykkes profilet således op i subsektioner af 64 meter med ca. 500 meter paddingområder i hver side af subsektionen – som vist på figur 7.1. Cellebredden for paddingområderne er aftagende væk fra subsektionen og for resistivitetsværdien i paddingcellerne benyttes den aktuelle resistivitet fra sidesubsektionerne. Fra de ca. 500 meter og til ∞ angives en baggrundsresistivitet. Det har vist

Padding med sidesubsektion: Cellebredde fra 1 til 200 meter	Del af sidesubsektion: Cellebredde 0,5 m	Subsektion: Cellebredde 0,5 m	
← ca. 450 meter →	← 48.5 meter →	← 64 meter →	...

Figur 7.1: Lateral diskretisering af én subsektion med venstre del af paddingzonen.

sig, at placering af en elektrode imellem to celler med forskellig resistivitet

medfører ustabilitet i forwardberegningen. Resistivitetsprofilen er derfor indrettet således, at elektrodeplaceringerne ikke sker i en resistivitetskontrast. Dette er gjort ved, at celler parvis har samme resistivitet. Laterale resistivitetændringer i forwardsektionen kan således ske med 1 meters mellemrum. Den laterale datasampling bliver ligeledes 1 meter, hvilket tilnærmelsesvis stemmer overens med datatætheden for PACES-systemet jf. afsnit 2.5.1.

Vertikalt diskretiseres forwardsektionen ned til 200 meter med stigende celletykkelse nedefter som vist på figur 7.2. Fra 200 til ∞ anvendes en baggrundsresistivitet.

Dybde, meter	Celletykkelse, [m]
↓ 0,25	0,125
↓ 3,0	0,25
↓ 5,0	0,5
↓ 10	1,0
↓ 20	2,0
↓ 50	5,0
↓ 60	10
↓ 75	15
↓ 125	25
↓ 200	75
↓ ∞	∞

Figur 7.2: Vertikal diskretisering af forwardsektionen.

En subsektion af 64 meter kommer således til at indeholde $365 \times 38 = 13870$ celler. Uden for diskretiseringsområdet angives en baggrundsresistivitet. Responset fra de 8 konfigurationer for hver meter hen over profilen returneres som en tilsyneladende resistivitet normeret til en strøm på 1 A. Endvidere korrigeres responserne med en halvrumskorrektion. Halvrumskorrekturen er den relative difference mellem finite-difference nettets respons for et homogent halvrum og det sande respons (halvrumsværdien). Korrekturen er ikke nødvendigvis korrekt for den aktuelle sektion, men den vil mindske de faktiske numeriske fejl. Korrekturen for de enkelte celler er af størrelsesorden en faktor 0.997–1.003.

Ovenstående diskretisering er primært valgt ud fra, at der ønskes et så nøjagtigt forwardrespons som muligt. Diskretiseringsgraden er således væsentligt finere end diskretiseringen, man vælger til 2D-inversion.

Forwardresponsets nøjagtighed kan vurderes, dels ved at sammenligne responset med et analytisk beregnet respons for modelsektion bestående af to kvartrum dels ved at sammenligne med responser fra lagdelte 1D-modeller fra 1D-DC-koder. Det analytiske respons for en modelsektion bestående af

to kvartrum kan beregnes som følgende: Potentialet i punkt P, hvis P ligger i samme kvartrum som strømkilden O (O' spejlstrømkilden)(Jacobsen 1997):

$$\mathbf{V}(P) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_{OP}} + \frac{K}{r_{O'P}} \right)$$

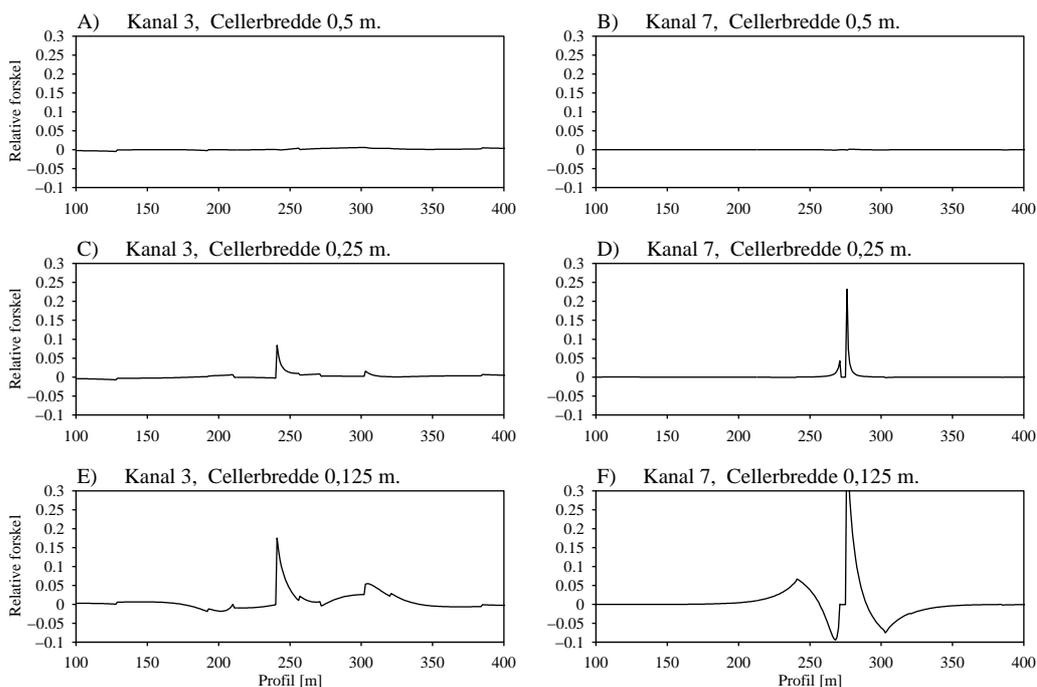
Potentialet, hvis P ligger i nabokvartrummet:

$$\mathbf{V}(P) = \frac{I\rho_2}{2\pi} \frac{1 - K}{r_{OP}} \quad (7-1)$$

Potentialet og den tilsyneladende resistivitet for en 4-polsopstilling kan da beregnes som angivet i formel (2-7).

I figur 7.3 ses den relative forskel mellem det analytiske respons og finite-difference-responset for en modelsektion bestående af to kvartrum (10 100

Relativ forskel mellem analytisk- og finite-differencerrespons

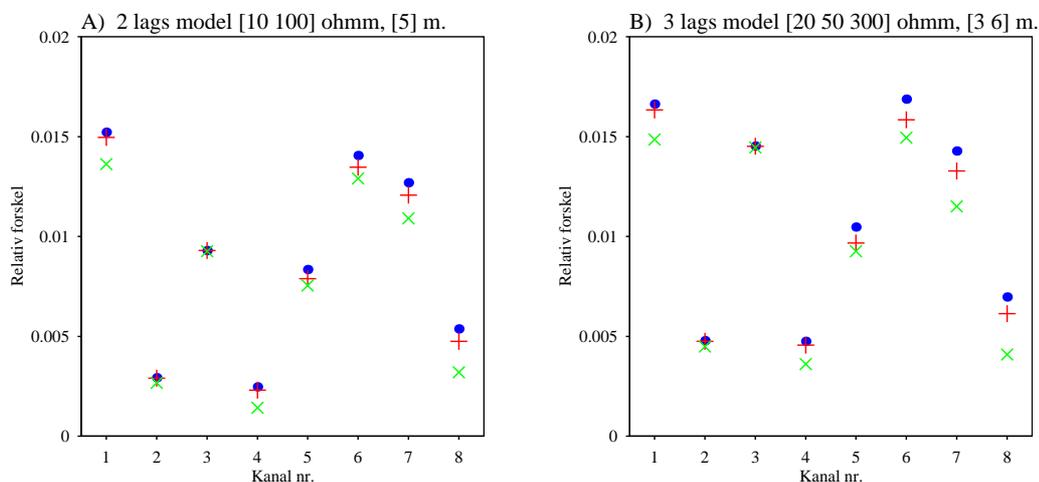


Figur 7.3: Relativ forskel mellem det analytiske respons og finite-difference-responset for en model bestående af to kvartrum med en resistivitetskontrast på en faktor 10. A & B: Horizontal diskretisering på 0,5 meter, C & D: Horizontal diskretisering på 0,25 meter og E & F: Horizontal diskretisering på 0,125 meter. Venstre kolonne for kanal 3. Højre kolonne for kanal nr. 7.

Ω m) for henholdsvis kanal 3 og kanal 7 (fra figur 2.6) for det i figur 7.1 og 7.2 beskrevne finite-difference-net. Som det fremgår af plot A & B er den relative forskel $< 1\%$, hvilket er kendetegnende for alle otte kanaler. I plot C & D og E & F i figur 7.3 ses på samme måde som i plot A & B den relative forskel mellem det analytiske respons og finite difference-responset – her med en horisontal diskretisering på henholdsvis 0,25 og 0,125 meter. Som det fremgår af plottene resulterer den finere diskretisering i større relativ afvigelse. For den horisontale diskretisering på 0,25 meter med en relativ afvigelse på op til $\approx 20\%$ og for diskretiseringen på 0,125 meter op til $\approx 30\%$ (plot F). At den finere diskretisering ikke resulterer i en mere nøjagtig respons må skyldes, at forwardkoden bliver numerisk ustabil. Diskretisering, som er angivet i figur 7.1 og brugt i figur 7.3 (plot A & B), synes altså at være den optimale for de ønskede forhold. Det er denne horisontale diskretisering, der benyttes til de fremtidige responsberegninger.

For at belyse den vertikale diskretiserings indflydelse på finite-difference-responset blev dette sammenlignet med responset beregnet med 1D-kode – idet det kan antages, at 1D-kode-responset er lig det sande respons, med nøjagtighed på ca. 1% . I figur 7.4 A ses således den relative forskel mellem responset beregnet med en 1D-kode og finite-difference-responset for

Relativ forskel mellem EM1DINV- og finite-difference-respons



Figur 7.4: Relativ forskel mellem respons fra EM1DINV og finite-difference-responset for: \times Vertikal diskretisering som i figur 7.1. $+$ Halv så fin vertikal diskretisering som i figur 7.1 i de første 5 meter. \bullet Kvart så fin vertikal diskretisering i de første 5 meter. A: For en nedstigende 2-lags model på [10 100] ohmm. [5] m. B: For en 3-lagsmodel på [20 50 300] ohmm. [3 6] m.

en 2-lagsmodel. Responssammenligningerne er gjort for tre forskellige vertikale diskretiseringsgrader for alle 8 kanaler. Som det fremgår af figuren, er den relative usikkerhed i alle tilfældene $<1,5\%$. Med hensyn til den vertikale diskretisering vindes kun et par procentpoint ved at benytte den fineste diskretisering (\times).

Figur 7.4 B er opbygget på samme måde som figur 7.4 A, her er det blot responser fra en 3-lags model, der sammenlignes. Her synes gevinsten ved at benytte en finere vertikal diskretisering at være lidt større – op til ca. 3 procentpoint. Selv om gevinsten ved at benytte den finere diskretisering er relativt lille, anvendes denne dog fremover. Det er således diskretiseringen i figur 7.1 og 7.2, der benyttes til de efterfølgende responsberegninger.

Det kan antages, at usikkerheden på finite-difference-responset for de ovennævnte testmodeller (i figur 7.3 og 7.4) også er repræsentativ for andre og mere komplekse modelsektioner, idet testmodellerne både repræsenterer skarpe horisontale- og vertikale laggrænser. Det kan således antages, at usikkerheden på forwardresponser for vilkårlige modelsektioner er $<2\%$. Set i forhold til den behandling, data underlægges før LCI-tolkningen (addering af støj, midling/filtrering), kan effekten af usikkerhed på forwardresponset med hensyn til hvor succesfuld LCI-inversionen er, antages at være minimal.

7.2 Behandling af data, filtrering, støj mm.

De syntetiske data fra DCFOR2D skal i så høj grad som muligt afspejle virkelig 8-kanals-slæbedata. Forwardresponset er derfor underkastet de samme procedurer, som et virkeligt datasæt udsættes for før selve inversionen.

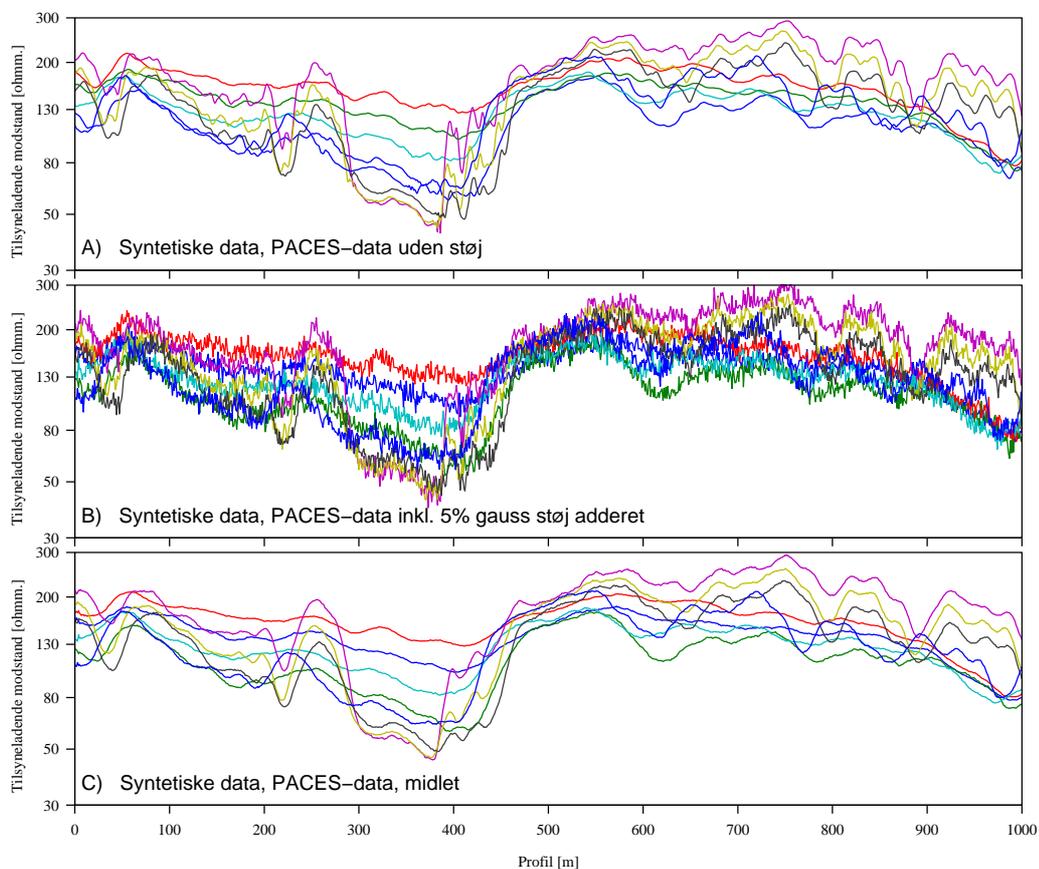
Som omtalt i afsnit 2.2 vil data altid være støjfyldte - dels er der geologisk støj dels slæbestøj og instrumentstøj. Jf. afsnit 2.2 kan denne støj antages at være gauss-fordelt med en størrelse på ca. 5%. De syntetiske data adderes derfor 5% gauss-støj før viderebehandling. Udover den geologiske støj og instrumentstøjen vil virkelige data som regel også indeholde støj i form af *spikes*. Data filtreres derfor normalt med et *non-spikes*-filter¹. De syntetiske data indeholder kun den adderende gauss-støj og en *non-spikes*-filtrering bliver derfor ikke udført. På figur 7.5 A og B ses plot af syntetiske data henholdsvis før og efter støjadderinger på de 5%.

Med en datasampling på 1 meter vil følsomhedsområdet på to på hinanden følgende målinger – for de enkelte kanaler – have et endog meget stort overlap. Det er derfor fornuftigt at midle data. Ved en midling af data opnår man endvidere en udglatning af skarpe strukturer og delvist en affoldning af 2D- og 3D-effekter, hvilket gør data mere egnet til LCI-inversionen. En midling af data reducerer også støjniveauet på data. De syntetiske data er midlet

¹*Non-spikes*-filter: Et filter, der ikke tillader pludselige ændringer i størrelsen på data og derved fjerner eventuelle *spikes*.

med samme filter, som er standard for slæbegeoelektriske data. Midlingen foretages med et simpelt boxfilter² med følgende midlingsbredder for kanal 1–8: [17,23,31,19,17,17,17,17] meter. I midlingsbredderne er der taget højde for, at målekonfigurationerne har forskellig lateral følsomhed. Optimalt set burde midlingsbredden- og vægtningen af data netop svare til konfigurationernes laterale følsomhed. Dette er dog ikke trivielt at fastslå. Man kan sige, at så lang tid midlingsbredden ikke overstiger konfigurationens laterale følsomhed, har man ikke indført noget i data, som bryder med metoden.

På figur 7.5 B og C ses plot af syntetiske data henholdsvis før og efter midling. Som det fremgår af plottene fjernes en stor del af støjen ved midlingen og data glattes.



Figur 7.5: Syntetiske 8-kanals slæbedata. *A:* Uden støj, *B:* inkl. 5% gauss-støj, *C:* Efter midling. Data er ikke shiftet derfor ikke sammenfaldende toppe for de 8 kanaler.

For en given position af slæbet vil de 8 målekonfigurationer have forskellige midtpunkter, og en måling i tid vil således ikke repræsentere en sondering.

²Boxfilter: Alle data i intervallet vægtes lige meget.

Det er derfor nødvendigt at sample data i stedlige intervaller til sonderinger – shiftning af data. For de tre Wenner-konfigurationer (kanal 1–3 på figur 2.1) tilskrives data til midtpunktet mellem strømelektroderne. For dipol-dipol konfigurationer (kanal 4–8) tilskrives data til midtpunkterne mellem de to tætstående strøm- og potentialelektroder, idet den største følsomhed ligger her jf. figur 2.3.

LCI-inversion af en sektion med en sonderingstæthed på 1 meter vil resultere i et meget stort inversionsproblem, idet datatilpasningen sker for alle sonderingerne i sektionen på én gang som følge af de laterale bånd.

Da metoden midler lateralt, og da data underlægges en lateral midling, kan man reducere antallet af sonderinger og stadig bevare den samme information om resistivitetsforholdene. Således er slæbegeoelektriske data som standard blevet inverteret med en sonderingstæthed på 10 meter. LCI-inversionerne i dette speciale er dog med en sonderingstæthed på 5 meter grundet den stigende regnekapacitet, der er til rådighed med nutidens computere.

Opsummering af databehandlingen af de syntetiske data:

- 5 % gauss-støj adderes til de syntetiske data fra DCFOR2D-koden.
- Der foretages ikke en *non-spikes*-filtrering, da de syntetiske data ikke indeholder *spikes*.
- Data midles med et *running-mean*-filter, som er et simpelt boxfilter. Midlingsbredde for de otte kanaler er [17,23,31,19,17,17,17,17] meter.
- Data shiftes til fælles midtpunkter og samles til sonderinger i én meters intervaller.
- Data inverteres med en sonderingstæthed på 5 meter.

8 Forståelse og optimering af LCI-inversionen

I dette afsnit belyses, hvordan samspillet mellem data og bånd er i inversionsfasen. Dette gøres blandt andet ved at studere model resolutions-matricen. Endvidere undersøges det, hvilke størrelser og typer af de laterale bånd, der er det optimale for LCI-inversionen. Herefter testes det, hvilke begrænsninger de laterale bånd medfører med hensyn til opløsning af strukturer og resistivitetsvariationer.

8.1 Model resolutions-matrice

I det følgende studeres model resolutions-matricen \mathbf{R} . Hvor tæt de estimerede modelparametre (\mathbf{m}_{est}) er på de sande, men ukendte, modelparametre, (\mathbf{m}_{true}) kan vises på følgende måde. Indsættes udtrykket for de observerede data $\mathbf{Gm}_{true} = \mathbf{d}_{obs}$ i udtrykket for modelestimatet $\mathbf{m}_{est} = \mathbf{H}_{inv}\mathbf{d}_{obs}$ opnås:

$$\mathbf{m}_{est} = \mathbf{H}_{inv}\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{H}_{inv}[\mathbf{Gm}_{true}] = [\mathbf{H}_{inv}\mathbf{G}]\mathbf{m}_{true} = \mathbf{Rm}_{true} \quad (8-1)$$

\mathbf{R} afhænger således kun af frechet-kernen og a priori-information. Hvis $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} identitetsmatricen), er de estimerede modelparametre selvstændigt bestemt. Er \mathbf{R} derimod forskellig fra identitetsmatricen, er de estimerede modelparametre fremkommet som et vægtet gennemsnit af de sande modelparametre (Menke 1989).

Med både a priorividen og bånd inde i billedet udvides forholdene til at omfatte en \mathbf{R} -matrice for både data (\mathbf{R}_{data}), a priori (\mathbf{R}_{prior}) og bånd (\mathbf{R}_{con}).

Modelestimatet, hvor a priorividen og bånd indgår, kan jf. afsnit 4.2 udtrykkes som:

$$\mathbf{m}_{est} = \left(\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}_m^{-1} \right)^{-1} \cdot \left[\mathbf{G}^T \mathbf{C}_{obs}^{-1} (\mathbf{Gm}_{true} + \mathbf{e}) + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_c^{-1} \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{m}_{prior} \right] \quad (8-2)$$

Udskrives dette udtryk vil de tre *resolution*-matricer være givet ved:

$$\mathbf{m}_{est} = \underbrace{\mathbf{C}\delta\mathbf{m}\mathbf{G}^T\mathbf{c}_e^{-1}}_{\mathbf{R}_{data}} (\mathbf{G}\mathbf{m}_{true} + \mathbf{e}_{obs}) + \underbrace{\mathbf{C}\delta\mathbf{m}\mathbf{C}\mathbf{m}^{-1}}_{\mathbf{R}_{prior}} (\mathbf{I}\mathbf{m}_{prior} + \mathbf{e}_{prior}) + \underbrace{\mathbf{C}\delta\mathbf{m}\mathbf{B}^T\mathbf{C}_c^{-1}}_{\mathbf{R}_{con}} (\mathbf{B}\mathbf{m}_{true} + \mathbf{e}_c)$$

med

$$\mathbf{R}_{data} + \mathbf{R}_{prior} + \mathbf{R}_{con} = \mathbf{I} \quad (8-3)$$

Studeret et LCI-problem uden a priorividen kan der ses bort fra \mathbf{R}_{prior} . Ved at betragte \mathbf{R}_{data} kan man således udtale sig om vægtning mellem bånd og data.

Søjlernes betydning i \mathbf{R}_{data} -matricen kan belyses med dette eksempel: Haves n -modeller sammenbundet med laterale bånd, som ved LCI-inversion, og ændres én af de sande modelparametre i én af de sammenbundne modeller f.eks med +20, opnås:

$$\delta \mathbf{m}_{est} = \mathbf{R} \delta \mathbf{m}_{true} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & \cdots & R_{1,j} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & \cdots & R_{2,j} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \cdots & R_{3,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{i,1} & R_{i,2} & R_{i,3} & \cdots & R_{i,j} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{data}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{m}_{true}} \quad (8-4)$$

$\delta \mathbf{m}_{est}$ i ligning (8-4) giver en søjlevektor, hvor \mathbf{R}_{data} kun bidrager med den j 'te søjle (de øvrige multiplikationer giver 0). De enkelte søjler i \mathbf{R}_{data} -matricen indeholder altså information om, hvordan en ændring i den sande model kommer til udtryk i modelestimatet.

For at undersøge om dette også er tilfældet med den anvendte inversionskode (EM1DINV), er det ovennævnte eksempel med perturbation af én modelparameter udført. Der er i dette eksempel således først beregnet \mathbf{R}_{data} for en modelsektion bestående af 25 laterale sammenbundne 3-lags modeller med modelparametre for alle 25 på: $\rho_{1,2,3} : [300, 200, 5] \Omega\text{m}$ $t_{1,2} : [2, 5] \text{m}$ ($= \mathbf{m}_{true}$). I figur 8.1 A ses plot af søjlen i \mathbf{R}_{data} vedrørende ρ_1 for model nr. 13. Elementerne i 1. box hidrører fra ρ_1 , 2. box fra ρ_2 , 3. box fra ρ_3 , 4. box fra t_1 og 5. box fra t_2 . Udsvingene hen gennem plot A angiver altså, hvordan en ændring af $\rho_{1,13}$ i \mathbf{m}_{true} vil komme til udtryk i \mathbf{m}_{est} . En ændring af $\rho_{1,13}$ vil i dette tilfælde altså komme til udtryk i \mathbf{m}_{est} på følgende måde for $\rho_{1,x}$ hen gennem sektionen:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{m}_{est \rho_{1,13}} &= 0.49 \cdot \delta \mathbf{m}_{true, \rho_{1,13}} \\ \delta \mathbf{m}_{est \rho_{1,12,14}} &= 0.17 \cdot \delta \mathbf{m}_{true, \rho_{1,13}} && \text{(nabomodellerne)} \\ \delta \mathbf{m}_{est \rho_{1,11,15}} &= 0.06 \cdot \delta \mathbf{m}_{true, \rho_{1,13}} && \text{(nabo-nabomodellerne)} \end{aligned}$$

OSV...

For $\rho_{2,x}$, $\rho_{3,x}$ og $t_{1,x}$ vil perturbation af $\rho_{1,13}$ ikke have væsentlig indflydelse. Til gengæld vil perturbationen få lidt indflydelse på $t_{1,11-14}$.

Den fuldtoptrukne linie i figur 8.1 B-E repræsenterer en modelsektion, hvor der netop er foretaget en perturbation af $\rho_{1,13}$ her med 20 Ωm . Ved hjælp af søjlen \mathbf{R}_{data} kan inversionsresultatet så forudsiges. Prikkerne i plot B-E angiver netop dette inversionsresultat. Ved udregning kan det konstateres,

at de omtalte forhold opfyldes, idet det medtages, at inversion foregår på logaritmen til modelparametrene:

$$\mathbf{m}_{est} = \mathbf{R}\mathbf{m}_{true} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{est \rho_{1,13}} &= \exp(0,49 \cdot (\log 320 - \log 300) + \log 300) \approx 310 \Omega\text{m} \\ \mathbf{m}_{est \rho_{1,12,14}} &= \exp(0,17 \cdot (\log 320 - \log 300) + \log 300) \approx 303 \Omega\text{m} \\ &\text{OSV.} \\ \mathbf{m}_{est t_{1,13}} &= \exp(0,25 \cdot (\log 320 - \log 300) + \log 2) \approx 2 \text{ m} \\ &\text{OSV.} \end{aligned}$$

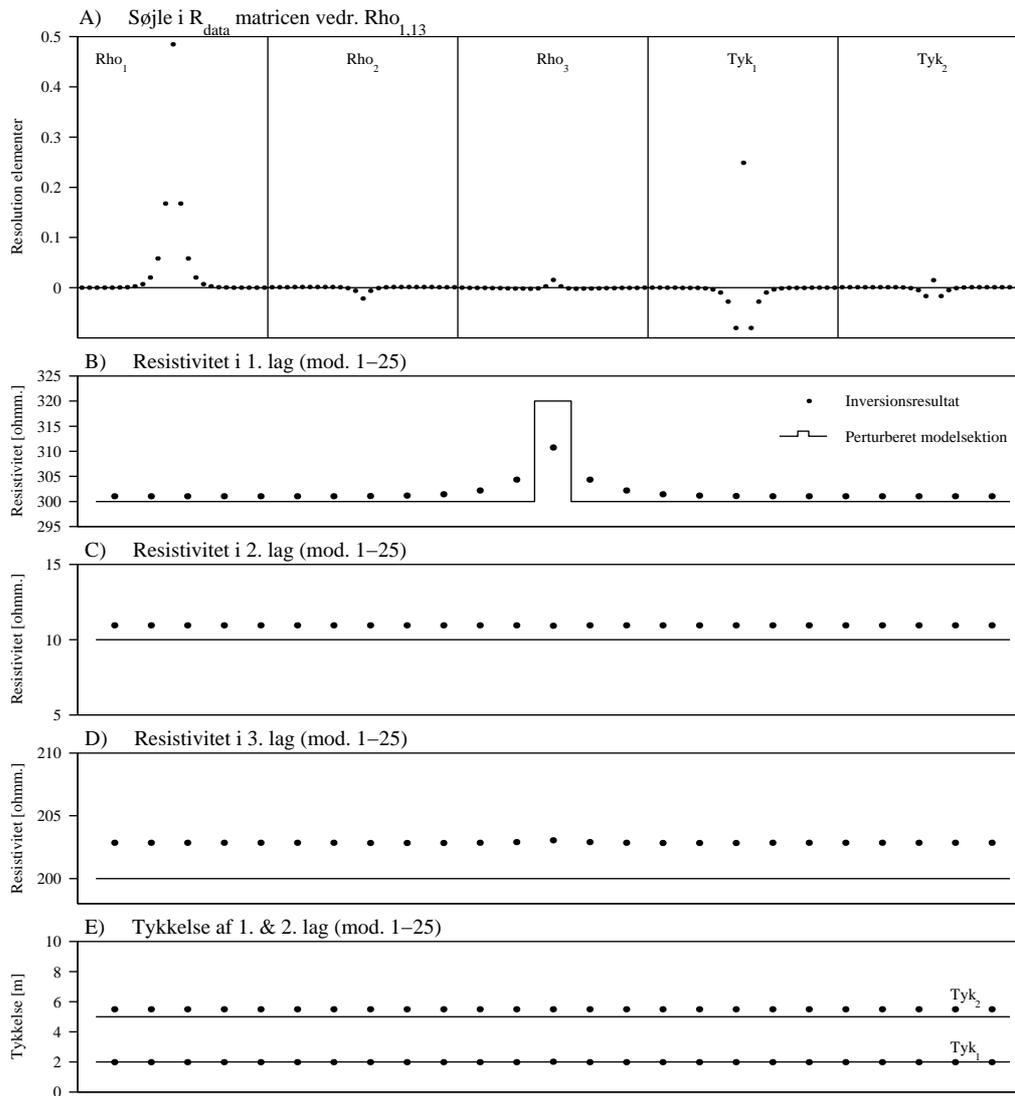
Til trods for, at resolution-elementet for $t_{1,13}$ i figur 8.1 plot A er relativt stor (0,25), bevirker perturbationen af $\rho_{1,13}$ kun en minimal ændring af $t_{1,13}$, idet inversionen foregår i det logaritmiske rum.

Hvorfor har søjlerne i \mathbf{R}_{data} i figur 8.1 A så den karakter? Hvis ikke der var lagt laterale bånd på resistiviteterne mellem modellerne, ville hele effekten af en perturbation slå igennem på netop den model, der indeholder den perturberede modelparameter? Da perturbationen af $\rho_{1,13}$ ikke kan slå fuldt igennem på den modelparameter, der er perturberet, på grund af de laterale bånd, ændres de øvrige modelparametre for at opnå den bedste datatilpasning. I figur 8.1 A kommer dette til udtryk ved, at primært tykkelsen af første lag forøges for model nr. 13 (4. box). Den lidt for høje resistivitet, som nabomodellerne vil få som følge af en perturbation af $\rho_{1,13}$, vil kompenseres ved, at tykkelserne af første lag bliver mindre – derfor de negative værdier for $t_{2,x}$ (5. box i plot A).

Hvordan kan denne information så være nyttig i inversionsøjemed – idet man ved inversion med rigtige data ikke kender den sande model og derfor ikke kender \mathbf{R}_{data} for den sande model? DC-problemet er et svagt non-lineært problem, hvilket medfører, at små modelændringer kun vil resultere i ubetydelige ændringer i \mathbf{R}_{data} . \mathbf{R}_{data} fra modelestimatet er altså repræsentativ for \mathbf{R}_{data} for den sande model. Ved at studere \mathbf{R}_{data} tilhørende den estimerede model får man information om, i hvilken grad de laterale bånd har haft indflydelse på modelestimatet.

Model-*resolution*-matricen kan også beskues fra et rækkemæssigt synspunkt. Den i 'te række i \mathbf{R}_{data} har således indflydelse på $\mathbf{m}_{est,i}$ på følgende måde:

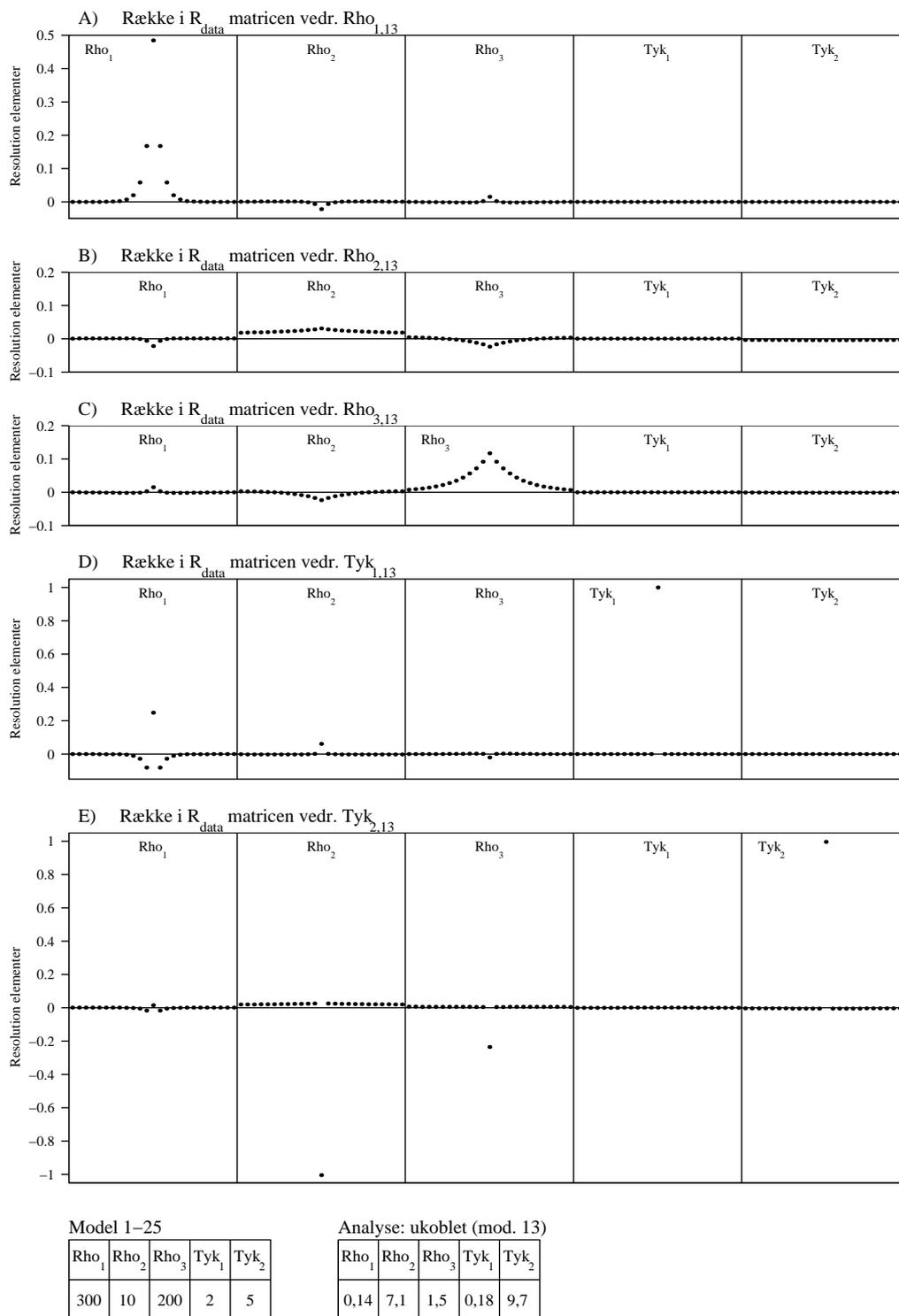
$$\mathbf{m}_{est,i} = \sum \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{m}_{true,j} = i \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & \cdots & R_{1,j} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & \cdots & R_{2,j} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \cdots & R_{3,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{i,1} & R_{i,2} & R_{i,3} & \cdots & R_{i,j} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}_{true}} \right.$$



Figur 8.1: A: Søjler i \mathbf{R} -matrix vedrørende $\rho_{1,13}$. B-E: (—) Den perturberede modelsektion. • Inversionsresultat af data fra den perturberede modelsektion.

Hvis off-diagonalelementerne er små i \mathbf{R}_{data} – det vil sige, at diagonalelementet i den i 'te række er relativt stort – vidner dette om, at den pågældende modelparameter er selvstændigt bestemt. Hvis derimod diagonalelementet i den i 'te række er relativt lille, er modelparameteren opløst under indflydelse af de øvrige modelparametre – såvel de øvrige modelparametre tilhørende den pågældende model, som nabomodelparametrene. I figur 8.2 er der plottet rækker i \mathbf{R}_{data} for model nr. 13, vedrørende henholdsvis ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , tyk_1 og tyk_2 . Nederst på figuren ses endvidere den ukoblede¹ analyse for model

¹Ukoblet analyse: Variansanalyse hvor information fra apriorividen og bånd ikke indgår



Figur 8.2: Plot af rækkeelementerne i R_{data} for de fem modelparametre vedr. model nr. 13. Nederst i figuren forwardmodel for alle de 25 modeller i forwardsektionen.

nr. 13. Som det fremgår af plot A, er toppen for ρ_1 (1. box) relativt smal. $\rho_{1,13}$ er altså i overvejende grad selvstændigt bestemt, og kun de nærmeste naboresistiviteter har haft indflydelse på opløsningen af denne parameter (de øvrige elementer i søjlen ≈ 0). Dette stemmer overens med den ukoblede analyse, idet resistiviteten i første lag er en velbestemt parameter. I figur 8.2 B som vedrører $\rho_{2,13}$ ses det, at resistiviteten i andet lag for alle 25 modeller bidrager næsten lige meget til opløsningen af $\rho_{2,13}$. Som det fremgår af analysen, opløser data dette lag meget dårligt (stor usikkerhed), og som vist får nabomodellerne gennem de laterale bånd relativt stor indflydelse på denne bestemmelse.

I plot D-E i figur 8.2, som omhandler de to tykkelser for model nr. 13, ses det tydeligt, at der ikke er laterale bånd på disse modelparametre. Nabomodellerne har kun meget lille indflydelse på bestemmelsen af disse tykkelser. $t_{1,13}$ er bestemt ud fra sig selv (4. box i plot D) samt under indflydelse af $\rho_{1,12-14}$ (1. box). $t_{2,13}$ er en ubestemt parameter som følge af en lavmodstandsækvivalens. Dette kommer tydeligt til udtryk i plot D, idet $t_{2,13}$ er opløst som en kombination af sig selv og $\rho_{2,13}$.

Som ovenstående viser, er sammenhænge mellem resolution-elementerne og de laterale båndes indflydelse i inversionsfasen en kompliceret sag. Dels fordi alle modelparametre i en modelsektion kan påvirke hinanden gennem de laterale bånd, og dels fordi inversionen foregår i det logaritmiske rum, hvilket forvrænger billedet af, hvilke ændringer der sker i absolutte størrelser. Endnu mere komplekst bliver det, hvis der også tilføjes a priorividen til problemet. Ønsket om at kunne udtale sig præcist om, hvordan en modelparameter er fremkommet, og eventuelt hvilken midlingsbredde den har, kan ikke uddrages på en simpel måde af studiet af *resolution*-matricerne.

Til gengæld illustrerer de ovennævnte eksempler, at de laterale båndes vægtning i inversionen falder, når data alene opløser modellen godt og omvendt. Endvidere demonstrerer eksemplerne også, at de laterale bånd er korrekt implementeret i inversionskoden (EM1DINV).

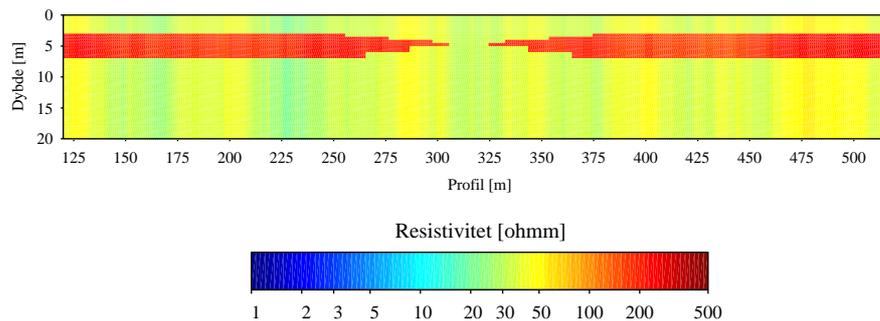
8.2 De laterale bånd – størrelse og type

Undersøgelserne i dette afsnit munder ud i retningslinier for størrelsen af de laterale bånd samt for hvilke modelparametre, det er mest optimalt at sammenkoble med laterale bånd.

Optimalt set skal de laterale bånd afspejle de faktiske variationer i modelrummet. Derved vil man få indført maksimal information om variationerne af modelparametrene, og ens modelestimat vil alt andet lige være tættere på den "sande" model. Endvidere vil dette resultere i en mere korrekt variansanalyse. Problemet er, at de faktiske variationer ikke kendes, og at de ikke er ensartede. Størrelse og art af de laterale bånd må man derfor søge at finde på

en række testsektioner. I modelsektioner, som data alene opløser godt, har de laterale bånd kun en relativt lille indflydelse på modelestimatet (som vist i afsnit 8.1). Modelsektioner af denne type er derfor ikke egnede som testsektioner for de laterale bånd. Testsektionerne skal derimod have en sådan karakter, at de laterale bånd får betydning for inversionsresultatet. Testsektionerne skal dog stadigvæk repræsentere geologisk realistiske scenarier.

Figur 8.3 viser den modelsektion, der er valgt til at optimere indstillingerne af de laterale bånd. Modelsektionen kunne repræsentere et sandlegeme,



Figur 8.3: Forwardsektion. De laterale stokastiske resistivitetsvariationer er genereret ved en von Karman-proces

der tynder ud og forsvinder helt i et morælerslag – et ikke utænkeligt scenarie i den øvre danske kvartære lagpakke. Geologien i modelsektionen må stadig betegnes som værende langsomt varierende. Sektionen indeholder en række ting, der gør, at de laterale bånd får indflydelse på inversionsresultatet. I siderne i modelsektionen er modellerne højmodstandsækvivalente og i midterzonen, hvor der er hul i sandlaget, går man rimeligt brat fra en 3-lagsmodel til en halvrumsmode. I inversionsfasen bevirker dette, at de laterale bånd i zonerne, hvor modelsektionen er ækvivalent, kommer i spil, da data alene opløser disse modeller dårligt. Ved overgangen til hullet i lerlaget vil informationen fra de laterale bånd være decideret forkert. Endvidere vil man i zonen, hvor sandlegemet forsvinder, komme i den situation, at antal lag i ens tolkningsmodel ikke stemmer overens med antallet i den sande model. Den viste modelsektion indeholder altså flere aspekter, der sætter LCI-inversionen på prøve.

LCI-inversion af PACES-data i Danmark er indtil i dag blevet udført med laterale bånd på resistiviteter og lagtykkelser. Sammenkoblingen af de enkelte modeller var med bånd til de tre nærmest liggende modeller på hver side med aftagende styrke udad. Som vist i afsnit 8.1 opnår man samme effekt ved blot at koble modelparametrene til nærmeste nabo – samtidig med at bånd til de tre nærmestliggende modeller blot komplicerer optimeringen. Derfor er alle tolkninger i dette speciale med laterale bånd kun til nabomodellerne. Endvidere tolkes der, jf. afsnit 7.2, med en sonderingstæthed på 5 meter

(mod førhen på 10 meter). Som følge af disse nye opsætninger var det ikke meget viden om, i hvilket område de optimale laterale bånd skulle findes. Undersøgelsen af, hvad der er de optimale indstillinger for de laterale bånd, har derfor i høj grad være efter *trial and error*-metoden. Udover laterale bånd på de primære modelparametre (tykkelser og resistiviteter), blev det undervejs også muligt at anvende laterale bånd på dybder, som beskrevet i afsnit 6.2. Der er således tre parametre, de laterale bånd kan påføres – resistiviteter, lagtykkelser og dybder samt kombinationer heraf.

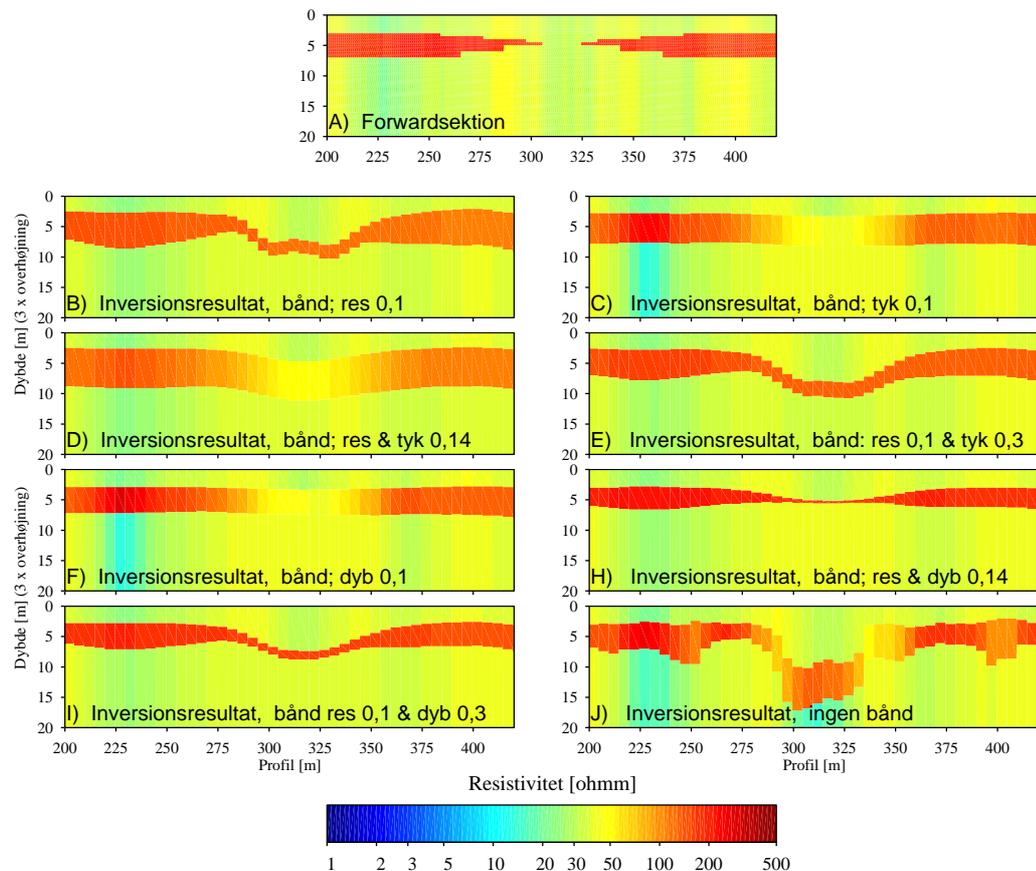
Med hensyn til størrelsen af de laterale bånd, er det bedre at have bånd, der er løsere end de faktiske variationer, end bånd der er kraftigere. Hvis modellerne er kraftigere sammenbundet end de faktiske forhold, indføres forkert information til løsning af problemet og desuden nedtones datas betydning i inversionsfasen – to ikke ønskelige forhold. I figur 8.4 ses en række inversionsresultater af den i figur 8.4 viste model. Data er behandlet som beskrevet i afsnit 7.2. Titlen på de enkelte modelsektioner angiver hvilke modelparametre, der er påført laterale bånd og med hvilken styrke. Modelsektionen i figur 8.4 B er således inverteret med laterale bånd på resistiviteter med en styrke på $0,1^2$.

Modelsektion J, er inversionsresultatet af en ordinær 1D inversion (ingen bånd). Fluktuationerne i specielt andet lag i siderne i modelsektion J skyldes dels, at data er støjfyldte, dels at der er tale om ækvivalente modeller. I midterdelen af sektionen ses tydeligt de 2D-effekter i form af bukseben, som 1D-inversion får af en udpræget 2D-forwardsektion.

Modelsektion B, der repræsenterer en LCI-inversion med laterale bånd på resistiviteter på 0,1, udviser allerede en forbedring i forhold til modelsektion J. Ækvivalensen i siderne af modelsektionen er rimeligt opløst. Tykkelsen af andet lag overestimeres med deraf følgende lavere resistivitet. Andet lags høje resistivitet trækkes gennem hullet i midten af modelsektionen og lidt ned. Dette skyldes dels de laterale bånd på resistiviteter, dels 2D-effekter i form af bukseben som vist i modelsektion J. At andet lag med relativ høj resistivitet føres gennem hele modelsektionen forklarer også, at resistiviteten af andet lag bliver estimeret for lavt i siderne af modelsektionen. Information fra data fra midterdelen føres via de laterale bånd ud i siderne af modelsektionen – for andet lags vedkommende med viden om en lavere resistivitet.

I figur 8.4 C er der inverteret med laterale bånd på tykkelser med en styrke på 0,3. Som det fremgår af modelsektionen sker overgangen fra 3-lagsmodeller til et homogent halvrum ved en glidende overgang i resistiviteten i andet lag. Buksebenseffekterne er her helt forsvundet som følge af, at de laterale bånd på specielt tykkelsen af første lag ikke tillader pludselige ændringer. Om man foretrækker inversionsresultatet i modelsektion B eller C er lidt en smagssag.

²Et bånd på f.eks. 0,1 betyder, at logaritmen til modelparameteren kan variere $\pm 0,1$. Dette svarer til en $\exp^{0,1}$ gange/dividere størrelse på modelparametrene.



Figur 8.4: A: Forwardsektion, B-J: LCI-inversionsresultater med forskellige kombinationer af laterale bånd. Res; laterale bånd på resistiviteter, tyk; laterale bånd på tykkelser, dyb; laterale bånd på dybder

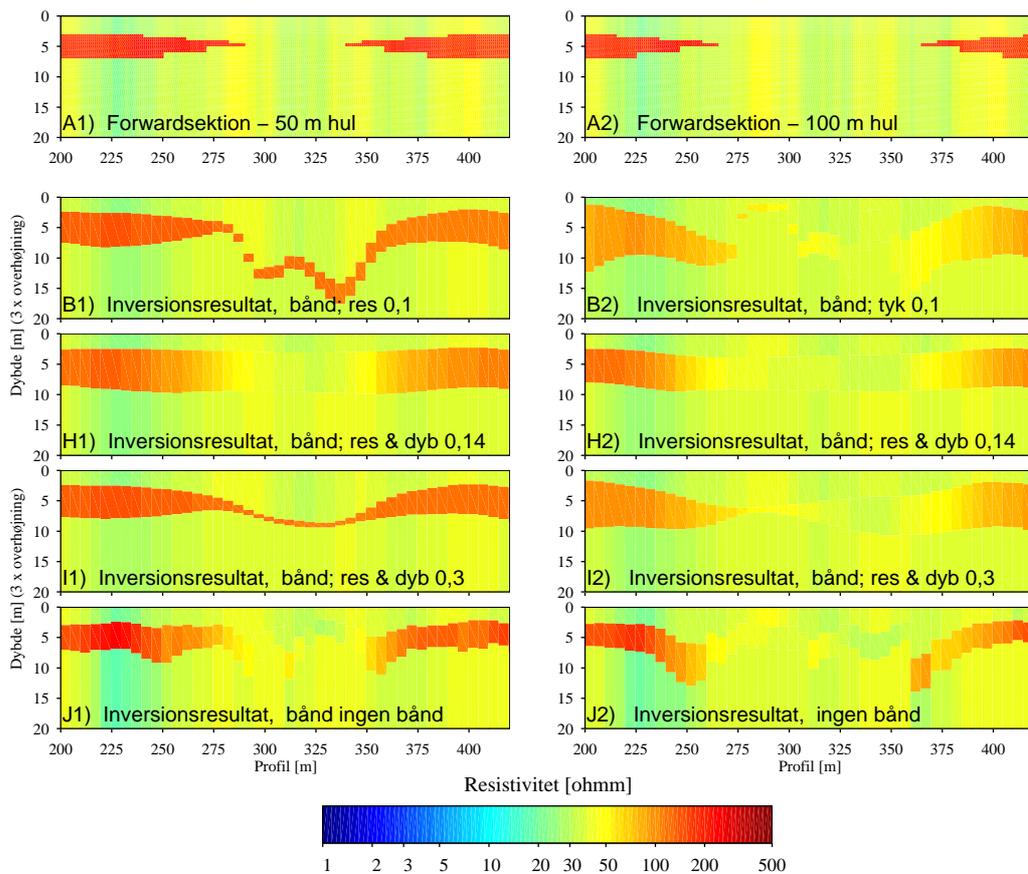
I modelsektion C genfindes hullet i andet lag; til gengæld er strukturerne af de to kiler helt væk. I modelsektion B er der tendens til den rigtige udkiling; til gengæld genfindes hullet ikke. Generelt kan man altså forvente, at når man påfører laterale bånd på resistiviteter, sker den største variation i tykkelser, og man vil have en større tendens til at genfinde strukturer. Påføres der derimod laterale bånd på tykkelser, sker de største variationer i resistiviteter. En forbedring vil måske opnås ved en kombination heraf. Dette er netop foretaget i modelsektion D og E i figur 8.4.

I modelsektion D ses effekten af, at der er lagt laterale bånd på både resistiviteter og tykkelser. Her sker overgangen til hullet ved en glidende overgang i resistiviteten. Strukturen af laggrænsen mellem første og andet lag ser fornuftig ud. Laggrænsen mellem andet og tredje lag, forbliver næsten konstant gennem hele modelsektionen som følge af bånd på tykkelsen af andet lag. Specielt modelsektion D inspirerede til ideen om at påføre laterale bånd på dybder i stedet for tykkelser. Herved vil man give anden laggrænse i

modelsektion D muligheden for at bule opad i midterdelen af sektionen i stedet for nedad.

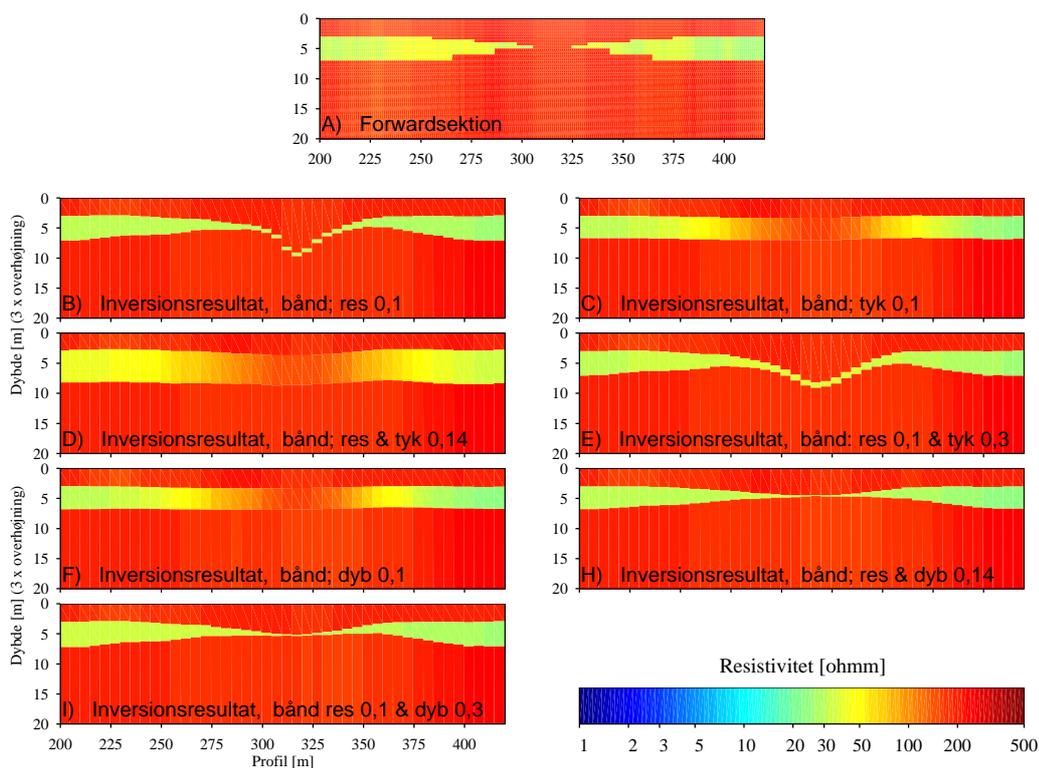
I modelsektion F ses inversionsresultatet, hvor der kun er laterale bånd på dybderne. Forskellene i forhold til modelsektion C er små; dog estimeres tykkelsen af andet lag i siderne af sektionen lidt bedre. Den store forbedring opnås i modelsektion H og I, der er inverteret med laterale bånd på dybderne kombineret med laterale bånd på resistiviteter. Specielt i modelsektion H genfindes strukturerne af de to kiler meget godt, og i midterste del med hullet tynder andet lag ud og forsvinder næsten helt. Indførelse af dybde-bånd synes også at reducere de omtalte bukseben – til dels i modelsektion I og i særdeleshed i modelsektion H. Forwardsektionens beskaffenhed taget i betragtning estimerer specielt inversionsresultatet i modelsektion H forwardsektionen særdeles godt.

Hvad sker der så, hvis man gør hullet i forwardsektionen større? – således at data i en større del af forwardsektionen indeholder information om et ho-



Figur 8.5: A 1–2: Forwardsektioner, B, H, I, J 1–2: LCI-inversionsresultater med forskellige kombinationer af laterale bånd.

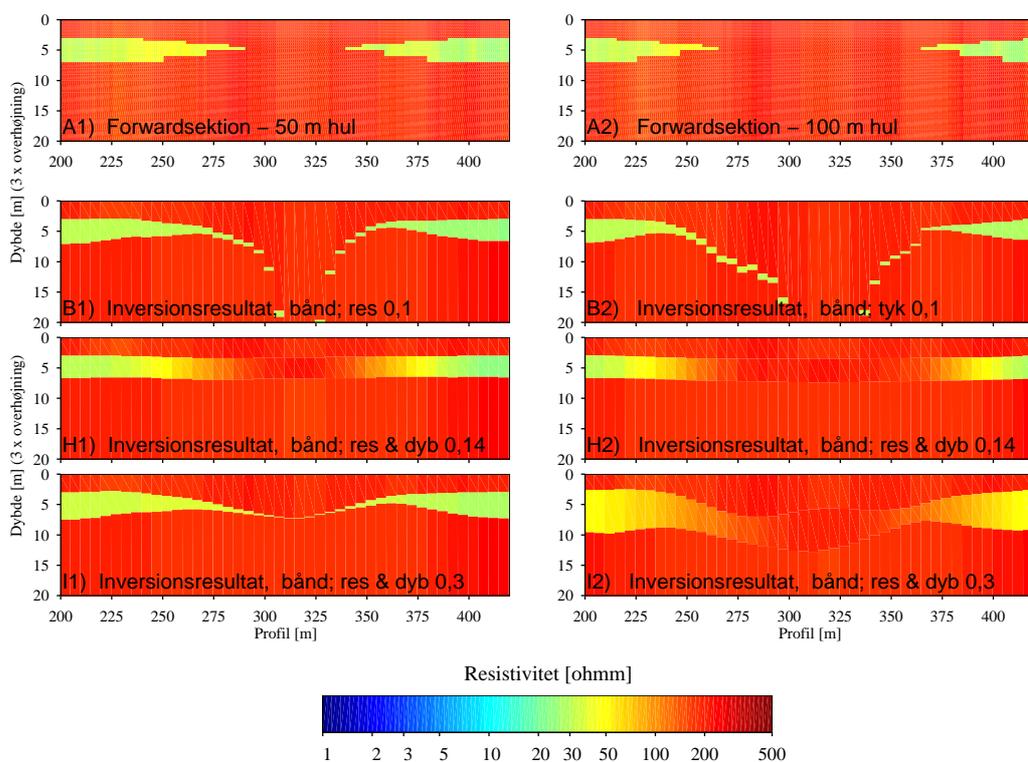
mogent halvrum, så for eksempel andet lag i figur 8.4 H ikke vil kunne føres igennem hele modelsektionen? Vil det stadig være de samme indstillinger af de laterale bånd, der er det optimale? I figur 8.5 ses inversionsresultater fra forwardsektioner, hvor hullet er øget til henholdsvis 50 meter (venstre kolonne i figur 8.5) og 100 meter (højre kolonne). Sektion A2 og A2 er forwardsektioner i figuren mens B,H,I og J 1 og 2 er inversionsresultater, med bogstavet svarende til de samme laterale bånd som i figur 8.4. Modelsektion B1 svarer meget til modelsektion B i figur 8.4 og estimeringen af forwardsektionen er ringe. Først i modelsektion B2, hvor hullet er øget til 100 meter, gives helt slip på andet lags høje resistivitet med et udmærket inversionsresultat til følge. I modelsektion H1 og H2 ses effekten af, at hullet i forwardsektionerne er øget i forhold til forwardsektionen i figur 8.4 tydeligt. Overgangen til hullet sker her ved en gradvis ændring i resistiviteten i andet lag og ikke som en udtyndning af laget. Som følge af de lidt kraftige laterale bånd på resistiviteter i modelsektion I1 i forhold til H1 holdes andet lags høje resistivitet igennem hele sektionen. I modelsektion I2 bliver hullet dog så stort, at overgang til hullet primært sker i gradvis ændring i resistiviteten og ikke i en



Figur 8.6: A: Forwardsektion, B-I: JCI-inversionsresultater med forskellige kombinationer af laterale bånd.

stærk udtyndning af laget. Modelsektionerne med laterale bånd på dybder og resistiviteter i figur 8.5 udviser også de bedste estimater, dog ikke så udtalt som i figur 8.4

Samme undersøgelser, som ovenfor beskrevet, er også udført på en modelsektion med et udkilende lavmodstandslag (8.6 A). En sådan modelsektion kunne repræsentere et udtyndende lerlag omgivet af sand og grus. For fuldstændighedens skyld vises i figur 8.6 og 8.7 inversionsresultater for denne modeltype med samme indstillinger af de laterale bånd som i figur 8.4 og 8.5 (J-sektionerne dog udeladt). Stort set samme inversionsresultater frem-



Figur 8.7: A 1–2: Forwardsektioner. B, H, I 1–2: LCI-inversionsresultater med forskellige kombinationer af laterale bånd.

kommer for denne modeltype, som for typen med det udkilende sandlag. I figur 8.6 er det således også modelsektionerne, der er inverterede med laterale bånd på dybder og resistiviteter (H og I), der estimerer forwardsektionerne bedst. I figur 8.7, hvor hullet er øget til henholdsvis 50 meter (venstre kolonne) og 100 meter (højre kolonne), er det ligeledes modelsektionerne, der er inverterede med laterale bånd på dybder og resistiviteter (H1, H2 og I1, I2), der resulterer i de bedste inversionsresultater.

Laves en generel sammenligning af inversionsresultaterne fra forwardsektionen med et lavmodstandslag (figur 8.6 og 8.7) med inversionsresultaterne

fra forwardsektionen med et højmodstandslag (figur 8.4 og 8.5), ses det, at lavmodstandssektionen generelt estimeres lidt bedre. Dette skyldes, at lavmodstandsækvivalensen ikke er så udtalt som højmodstandsækvivalensen, idet en større del af strømmen løber i lavmodstandslaget, og der er derved mere information om lavmodstandsækvivalensen end højmodstandsækvivalensen.

Konklusionen på, hvad der er de optimale indstillinger for de laterale bånd, er:

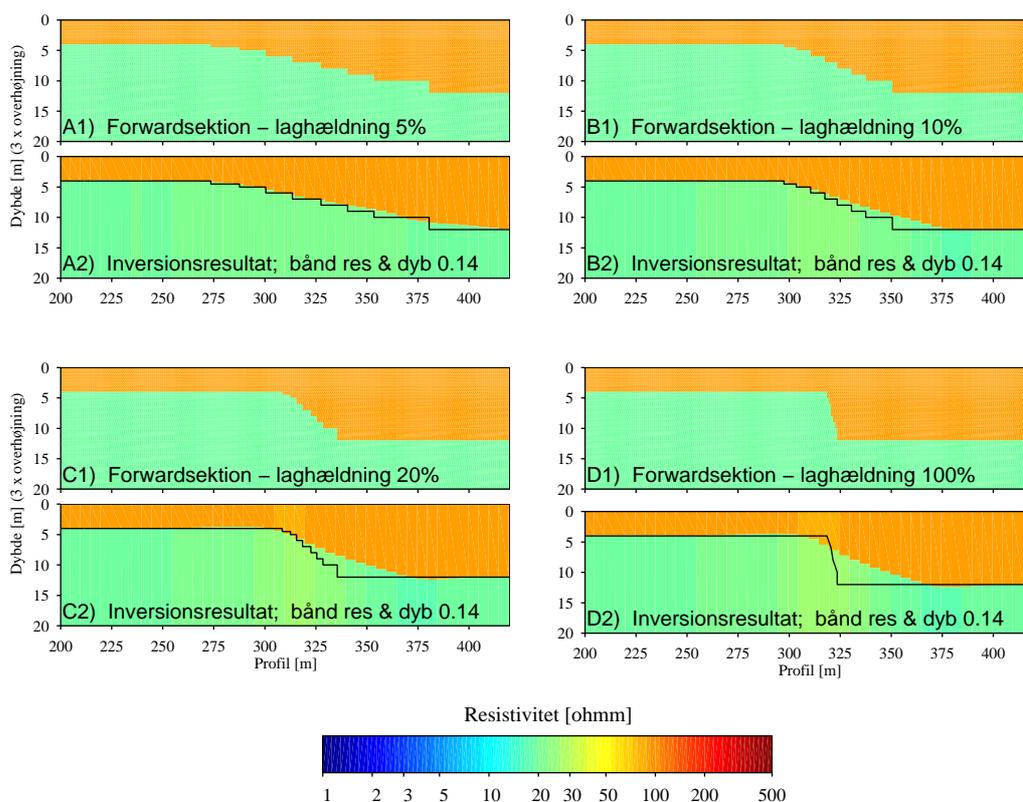
- Laterale bånd forbedrer inversionsresultatet.
- Laterale bånd på dybder er at foretrække frem for laterale bånd på tykkelser.
- En kombination af laterale bånd på resistiviteter og dybder resulterer i de bedste inversionsresultater.
- Med en sonderingstæthed på 5 meter synes laterale bånd på resistiviteter og dybder på henholdsvis $[0,1;0,3]$ eller $[0,14;0,14]$ at være fornuftige størrelser.

De følgende inversionsresultater i dette speciale vil således være med laterale bånd på resistiviteter og dybder. Der fortsættes med to sæt af de laterale bånd henholdsvis på $[0,1;0,3]$ og $[0,14;0,14]$ [resistiviteter, dybder]. Dette gøres primært for at belyse hvor kritisk størrelsen af de laterale bånd er.

8.3 Begrænsninger i laggrænsevariationer

Dette afsnit skal primært belyse, hvilke strukturmæssige begrænsninger, de laterale bånd eventuelt medfører. Af de to sæt af laterale bånd, der blev udvalgt i afsnit 8.2, anvendes i dette afsnit sættet af laterale bånd på 0,14 for resistiviteter og dybder – idet det må antages, at det primært er de laterale bånd på dybderne, der sætter begrænsningene for, hvor stejl en laghældning, der kan estimeres.

Modeltypen, der vil blive anvendt til undersøgelse af ovenstående, er en modelsektion bestående af 2-lagsmodeller med en hældende laggrænse. I figur 8.8 A1, B1, C1 og D1 ses forwardsektionerne med laghældninger fra 5% til 100%. Resistiviteten i første og andet lag er på henholdsvis 90 og 20 Ωm for denne sektion. Modelsektionerne A2, B2, C2 og D2 i figur 8.8 repræsenterer inversionsresultaterne. Som det fremgår af figuren, estimeres en laghældning på 5% og 10% perfekt (sektion A2 og B2). Hældning på 20% og 100% er for stejle til, at de kan estimeres korrekt. Inversionresultaterne i modelsektion B2, C2 og D2 er næsten identiske trods forskellige forwardsektioner. En hældning



Figur 8.8: A1, B1, C1 og D1: Forwardsektioner med laghældning 5–100%. A2, B2, C2 og D2: Tilhørende LCI-inversionsresultat. Den sorte streg angiver laggrænsen fra den tilhørende forwardsektion.

på de ca. 10% er altså den maksimale laghældning, der kan estimeres korrekt i dette tilfælde.

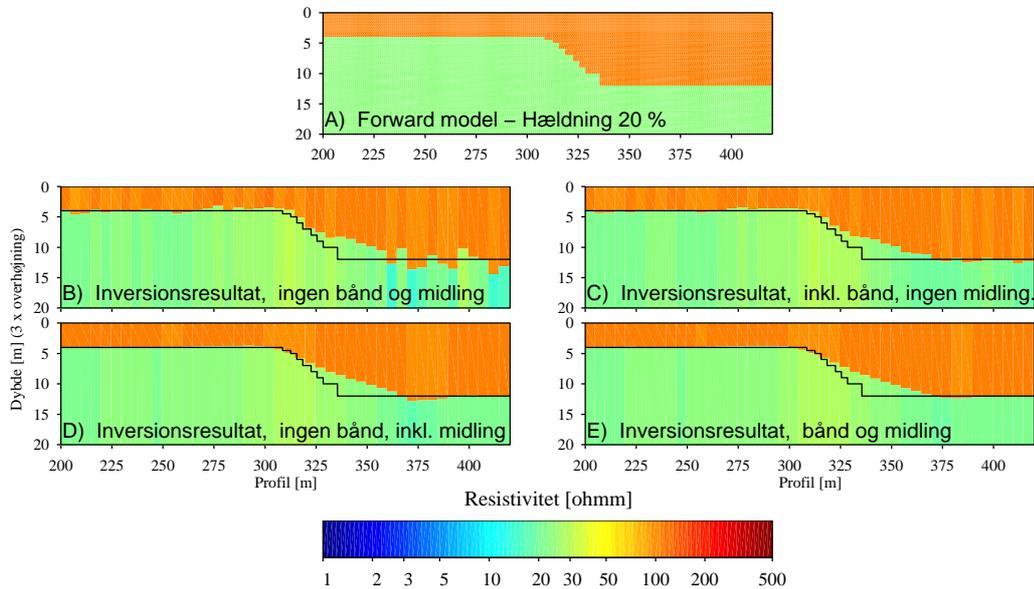
Der er tre processer, der glatter modelestimatet, således at der kan forekomme en begrænsning på, hvor stejl en laghældning, der kan estimeres:

- Midling af data med et box-filter (omtalt i afsnit 7.2).
- De laterale bånd i inversionsfasen.
- Den éndimensionale tolkningsmodel af den todimensionale sektion.

Betydningen af disse tre faktorer, belyses i figur 8.9. Som det fremgår af figuren, er laghældningen næsten ens for alle fire sektioner og alle med en laghældning mindre end de 20%³. Det er således klart, at det hverken er midlingen af data før inversionen eller de laterale bånd under inversionen, der er den begrænsende faktor for, hvor stejl en laghældning LCI-inversionen kan

³Samme forhold gør sig gældende for en laghældning på 100%

estimere. Den endimensionale tolkningsmodel må således være den primære begrænsende faktor.



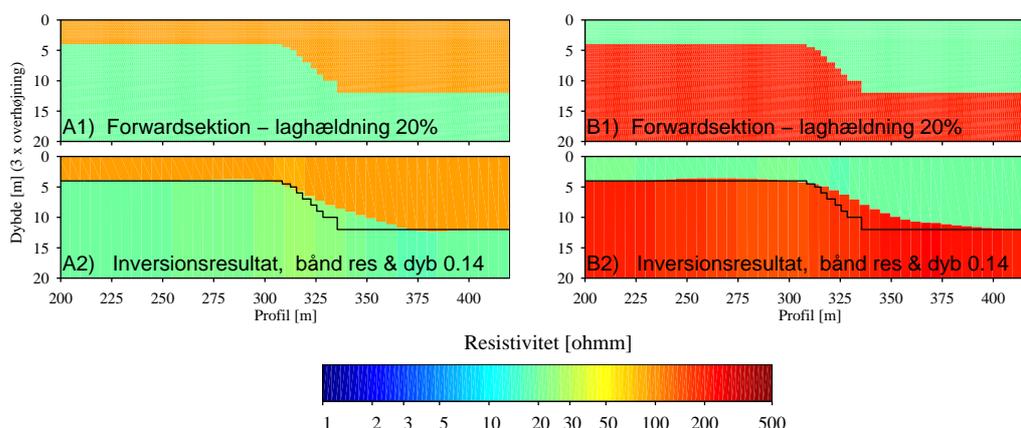
Figur 8.9: A: Forwardsektionen med en laghældning på 21%. B & C: Inversionsresultater, hvor data ikke er midlet. I B & D: Er inverteret uden laterale bånd.

For den i figur 8.8 viste modeltype er den maksimale laghældning, der kunne estimeres, ca. 10%. Hvorvidt denne grænse er modelafhængig belyses i figur 8.10.

I figur 8.10 er der også vist inversionsresultatet fra en forwardsektion bestående af opstigende tolagsmodeller med en større resistivtetskontrast end de førhen viste modeller. Som det fremgår, er laggrænseforløbet i de to inversionsresultater stort set identiske. Hverken resistivtetskontrasten eller modeltype har således væsentlig indflydelse på, hvor stejl en laggrænse, der kan estimeres.

Konklusion på, hvilke begrænsninger i variationer i laggrænser LCI-inversion medfører, er jf. ovenstående:

- Hverken de laterale bånd eller midlingen af data er den begrænsende faktor for, hvor stejl en laggrænse, der kan estimeres. Det betyder at det er den endimensionale tolkning af 2D data, der er den begrænsende faktor.
- Den maksimale laghældning, der kan estimeres, er på ca. 10%. Denne grænse er stort set modelafhængig.



Figur 8.10: A1 og B1: Forwardsektioner. A2 og B2: LCI-inversionsresultater.

- Laghældninger større end 10% udglattes til en hældning på ca. 10% uden væsentlig fejlestimering af resistiviteten.

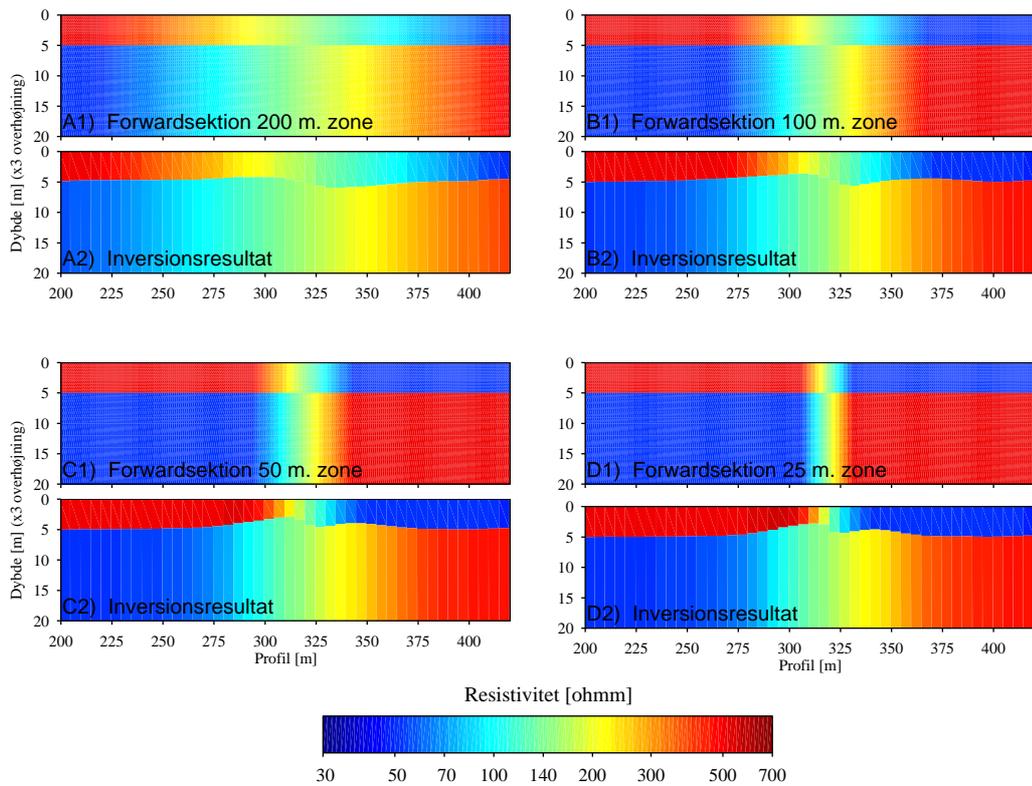
8.4 Begrænsninger i laterale resistivitetsvariationer

I dette afsnit belyses, hvilke eventuelle begrænsninger LCI-inversionen medfører med hensyn til, hvor hurtig variation af resistivitet kan foregå. Da det er primært de laterale bånd på resistiviteter, der sætter begrænsninger for, hvor hurtigt variation i resistiviteten i et lag kan ske, anvendes der i dette afsnit sættet af laterale bånd på 0,1 og 0,3 for resistiviteterne og dybderne. Modelsektionen, der testes på, er en 2-lagssektion med logaritmiske resistivitetsovergange fra 50 til 500 Ωm i begge lag over forskellige afstande som vist i figur 8.11. Som det fremgår, er forwardsektionen A1 og inversionsresultatet A2 næsten identiske. Der er således ingen problemer med at genfinde resistivitetsvariationerne, når de som her sker over 200 meter. I sektion B1 og B2, hvor resistivitetsvariationerne sker over 100 meter, bliver overgangszonen i den inverterede sektion for andet lags vedkommende lidt større, end den var i forwardsektionen. Resistivitetsvariationerne i første lag estimeres dog perfekt. I modelsektion C2 og D2 genfindes resistivitetsfordelingen i første lag næsten perfekt. Overgangszonen i andet lag i C2 og D2 er næsten ens, men alt for lang i forhold til forwardsektionernes på henholdsvis 50 og 25 meter.

Igen er der tre mulige begrænsende faktorer – midling af data, de laterale bånd og den éndimensionale inversionsmodel.

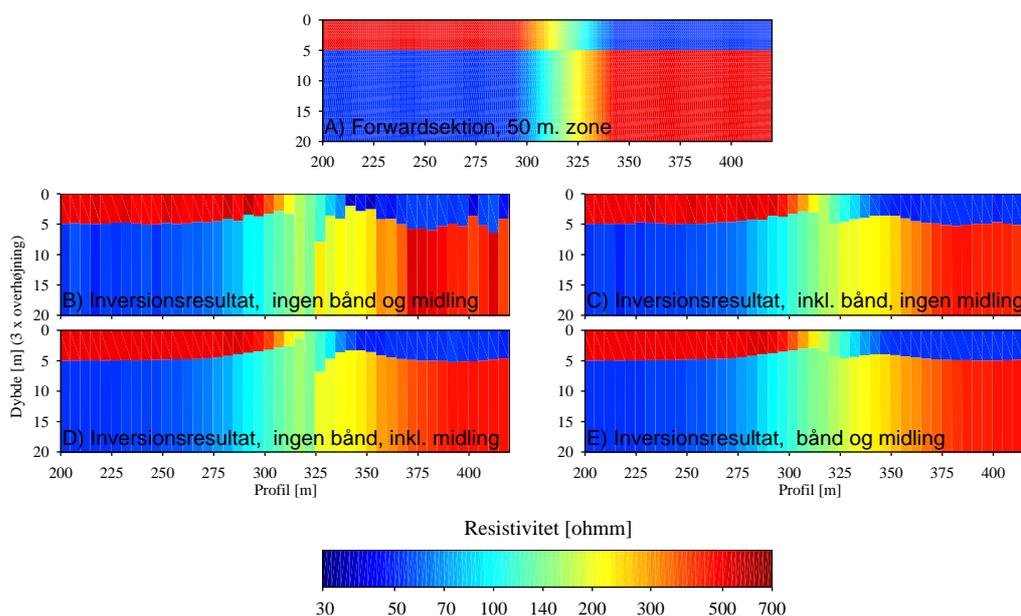
Den maksimale variation over n sonderinger, som de laterale bånd tillader, er givet ved:

$$\sqrt{n} \cdot LC_{res} \cdot \ln \rho_1 = \ln \rho_2 \quad (8-5)$$



Figur 8.11: A1, B1, C1 og D1: Forwardsektioner med logaritmsk fordelt resistivitetsovergang. A2, B2, C2 og D2: Tilhørende LCI-inversionsresultater.

LC_{res} er størrelsen af de laterale bånd på resistiviteterne, ρ_1 er startresistiviteten og ρ_2 er den maximale resistivetsforandring, der kan ske over n sonderinger. Med $\rho_1 = 50$ og $\rho_2 = 500$ og $LC_{res} = 0,1$ medfører det $n \approx 100$. Med en sonderingstæthed på 5 meter vil det sige, at overgangszonen for at harmonere med de laterale bånd minimum skal være ca. 500 meter. At overgangszonen kan blive væsentligt mindre en 500 meter skyldes, at data opløser modellerne så godt, at de laterale båndes betydning i inversionsfasen nedtones. For modelsektioner, som data alene opløser godt, er det altså ikke de laterale bånd, der er den begrænsende faktor for resistivetsvariationer. Inversionsresultaterne i figur 8.12 viser også tydeligt dette. Modelsektion A i figur 8.12 er forwardsektion med en overgangszone på 50 meter (fra figur 8.11). Modelsektion B og C er inversionsresultater, hvor data ikke er midlet inden inversionen, mens i modelsektion B og D er der inverteret uden laterale bånd – således at alle fire kombinationer af midling og laterale bånd forekommer. Som det fremgår af figuren, er de fire inversionsresultater med hensyn til bredden af



Figur 8.12: A: Forwardsektionen med en laghældning på 20%. B og C: Inversionsresultater, hvor data ikke er midlet. I B og D: Er inverteret uden laterale bånd.

overgangszonen stort set ens⁴. Det er således hverken midlingen af data eller de laterale bånd, der er den begrænsende faktor for, hvor hurtigt variationer i resistiviteten kan ske. Lige som i tilfældet med estimeringen af laghældningen er det også for resistivitetsvariationer den éndimensionale model, der er den begrænsende faktor. Dette forklarer også, hvorfor overgangszonen i første lag bliver mindre end i andet lag. De korte elektrodeafstande bestemmer hovedsageligt resistiviteten i toplaget og de lange elektrodeafstande resistiviteten i bundlaget. Det jordvolum, som én opstilling midler over, vil altså være langt større for de store elektrodeafstande end for de små afstande, og 2D-effekterne vil derfor være langt større for de store elektrodeafstande.

Konklusionen på undersøgelserne i dette afsnit er følgende:

- Hverken de laterale bånd eller midlingen af data er den begrænsende faktor for, hvor hurtigt resistivitetsvariationer kan ske i den inverterede modelsektion. Derimod er den éndimensionale tolkningsmodel den begrænsende faktor.
- Variationsbegrænsningen er udpræget dybdeafhængig, da de dybereliggende lag er mere påvirket af 2D-effekter, idet det primært er de store elektrodeafstande, der indhenter information om disse lag.

⁴Samme forhold gør sig gældende for en overgangszone på 25 meter

Der er således vist, at når data opløser en sektion godt, bryder de laterale bånd ikke ind og sætter begrænsninger på, hvordan en modelsektion kan udfolde sig med hensyn til resistivitets- og laggrænsevariationer.

9 Genkendelse af resistivitetssektioner ved LCI-inversion

9.1 Opbygning af forwardsektionerne

Dette afsnit skal primært redegøre for valg af modelsektioner, der skal bruges til analyse af LCI-inversionsmetoden. Som omtalt i afsnit 5 skal forwardsektionerne i så høj grad som muligt afspejle "sande" forhold. I afsnit 7 blev finite-differencenettet fastlagt, og det er således inden for disse rammer, at forwardsektionerne skal opbygges. I den danske kvartære lagpakke, som er interesseområdet, kan der antages en vis form for lagdeling. Ligeledes er det klart, at lagtykkelserne og laggrænserne ikke er konstante, ej heller er resistiviteten konstant i lagene. Som omtalt har det vist sig at være fornuftigt at beskrive disse variationer med en covariansfunktion af von Karman-typen (Pilkinton and Todoeschuck 1990). På grund af kompleksiteten ved von Karman-processen uddybes de nærmere matematiske forhold ikke. Von Karman-processen kan betragtes som en proces, hvor forholdet mellem kort- og langbølgede variationer, kan reguleres. For at benytte en stokastisk proces til at generere geologisk realistiske modelsektioner, er der en række forhold, der skal overvejes.

- Hvad skal forholdet mellem kort- og langbølgede variationer i modelsektionerne være ?
- Skal de stokastiske variationer være relative eller absolutte?
- Skal de stokastiske variationer være logaritmisk eller liniært fordelt?
- Skal forwardsektionen være med stokastisk varierende lagtykkelser eller laggrænser?

En række spørgsmål, der ikke kan besvares entydigt. Det bedste bud på et svar vil nok være et *både og*.

Da forwardsektionerne skal bruges til at belyse LCI-inversionsmetodens virkemåde, er der i genereringen primært lagt vægt på at frembringe sektioner med realistiske laterale variationer. Forwardsektionerne bliver således genereret efter følgende principper:

- 1) Én forwardsektion vil være 1000 meter plus paddingzoner, således at en inversionssektion bliver 1000 meter og dermed indeholder 200 sonderinger.
- 2) Der tages udgangspunkt i en lagdelt model for eksempel en 3-lagsmodel [200 40 200] Ωm [3 5] meter (= modelklasse).

- 3) Selve laggrænserne perturberes således, at der adderes et bidrag fra von Karman-generatoren til dybderne. Herved opnår man dels, at variationerne i laggrænserne ikke bliver dybdeafhængige (som tilfældet er, hvis tykkelserne perturberes), dels at lag kan gå i dagen samt tynde ud og forsvinde helt (hvilket ikke er muligt, hvis variationerne er relative).
- 4) Resistiviteterne varieres lateralt inden for et lag. Variationerne er relative til udgangsresistiviteten. Endvidere adderes der en stokastisk størrelse med middelværdi på $5 \Omega\text{m}$ og en varians på ca. $2 \Omega\text{m}$. Herved undgås det, at man får urealistisk lave resistiviteter i forwardsektionen. Endvidere opnår lag med en lille udgangsresistivitet også en vis variation i absolutte størrelser. Resistiviteter uden for intervallet $[5;1000] \Omega\text{m}$ regnes for urealistiske størrelser og resistivitetsværdien i celler i forwardsektionen uden for dette interval sættes derfor til henholdsvis 5 og $1000 \Omega\text{m}$.

Til analysen er der opstillet en række modelklasser, der hver især underinddeles i 2-3 typer. Hver type repræsenterer et scenarie af kort- og langbølgede variationer i resistiviteter og lagtykkelser. Modelklasser og typer er valgt således, at der gennemleves en række geologisk realistiske scenarier. Hvad der er geologisk realistiske scenarier, er dels vurderet ud fra almen geologisk viden og -intuition, dels ved at sammenligne de syntetiske data med feltdata. Som det fremgår af figur 9.1 har de syntetiske data og feltdata tilnærmelsesvis samme karakter. Støjniveauet på de syntetiske data er dog i dette tilfælde større end for feltdataerne, men som vist i figur 9.1 fjernes størstedelen af støjen ved filtrering og midling af data. Idet feltdata og de syntetiske data har tilnærmelsesvis samme karakter, kan det også antages, at modelsektionerne bag disse data har tilnærmelsesvis samme karakter. Modelklasser og typer, som analysen af LCI-inversionsmetoden udføres på, er følgende:

2-lagsmodeller

- Modelklasse 1-2:

- 1) Resistivitet $[200 \ 30] \Omega\text{m}$ lagtykkelse $[4]$ meter
- 2) Resistivitet $[40 \ 100] \Omega\text{m}$ lagtykkelse $[4]$ meter

- **Type:** (for modelklasse 1-2)

- A) Rolige variationer i resistiviteter og laggrænser.
- B) Kraftige variationer i resistiviteter og laggrænser.

3-lagsmodeller

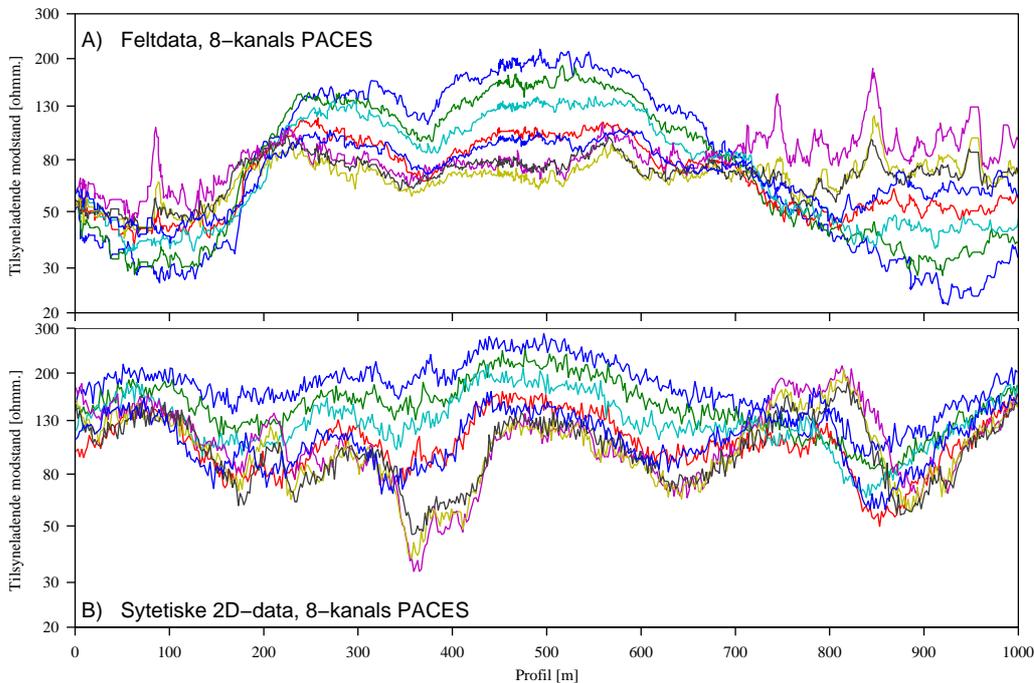
- Modelklasse 3-6:

- 3) Resistivitet $[200 \ 40 \ 200] \Omega\text{m}$ lagtykkelse $[3 \ 5]$ meter
- 4) Resistivitet $[50 \ 200 \ 50] \Omega\text{m}$ lagtykkelse $[3 \ 5]$ meter

- 5) Resistivitet [300 80 30] Ωm lagtykkelse [3 5] meter
- 6) Resistivitet [50 100 300] Ωm lagtykkelse [3 5] meter
 - **Type:** (for modelklasse 3-6)
 - A) Rolige variationer i resistiviteter og laggrænser.
 - C) Kraftigt varierende laggrænser.
 - D) Kraftige variationer i resistiviteter.

Resistivitets- og lagtykkelsesværdierne for modelklasserne angiver den udgangsmodel, der perturberes ud fra.

Type A repræsenterer forwardsektioner, hvor variationerne i resistivitet og laggrænserne forløber roligt, og modelsektioner af denne type forventes at resultere i de bedste inversionsresultater. I type B (kun for 2-lagsmodeller) er variationerne i resistivitet og laggrænsen kraftigere, hvilket bevirker, at der nogle steder i forwardsektionen er tale om et homogent halvrum. Endvidere fremkommer der også laghældninger i denne type, der er stejlere, end hvad LCI-inversionen i følge afsnit 8.3 kan estimere. I type C (kun for 3-lagsmodeller) er der kraftige variationer i laggrænserne, således at lag går i dagen og/eller tynder ud og periodevis forsvinder helt. Ligeledes opnås der også relativt stejle laghældninger. I Type D (kun for 3-lagsmodeller) varieres



Figur 9.1: A: PACES-feltdata (Rådata). B: Syntetiske PACES-data adderet 5% gauss fordelt støj (ingen filtrering). Data er ikke shiftet, derfor ikke sammenfaldende toppe for de 8 kanaler.

resistiviteterne relativt kraftigt, og kraftigere end de laterale bånd foreskriver.

I figur 9.5 til 9.12 ses plot af en forwardsektion fra alle klasser af alle typer. Som det fremgår af figurene skal modelklasserne ikke tages bogstaveligt. Dels tynder lag i forwardsektionerne nogle steder helt ud og forsvinder, dels bevirker resistivitesvariationerne for eksempel, at maksimumsmodeller bliver til minimumsmodeller nogle steder i en forwardsektionen. Taget in mente, at geoelektrikken skalerer i tykkelse og resistiviteter, afdækker de omtalte modelklasser og typer således et stort modelområde. Ud over variationer i lagtykkelser og resistivitet dækker de valgte modelklasser og typer også situationer, hvor tolkningsmodellen har flere lag, end der er i forwardsektionen, samt at variationer i dybder og resistiviteter er kraftigere, end de laterale bånd foreskriver. De valgte forwardsektioner repræsenterer således et solidt grundlag for analyse af LCI-tolkningsmetoden.

9.2 Genkendelseskriterier

Hvor succesfuld LCI-inversionen er, vurderes som omtalt ud fra tre kriterier – estimering af den geologiske lertykkelse, middelmodstandslag samt en samlet resistivitetsdifference for hele sektionen. De to første kriterier omhandler parametre, der i høj grad bliver brugt til sårbarhedsvurdering samt til opstilling af hydrogeologiske modeller. Det sidste kriterium er en sammenligning af resistiviteten punkt for punkt i sektionen.

For hver type i modelklasserne genereres og inverteres der 10 sektioner à 1000 meter. Sektionerne (realisationerne) inden for en modelklasse og type har samme statistiske egenskaber. Ved at sammenligne for eksempel den geologiske lertykkelse fra forwardsektionen med inversionresultatet, er det på baggrund af de 10 realisationer muligt at opstille statistiske udsagn om, hvor godt for eksempel den geologiske lertykkelse estimeres.

9.2.1 Den geologiske lertykkelse

Til sårbarhedsvurdering af blandt andet grundvandsmagasiner er tykkelsen af et eventuelt overliggende lerlag særdeles vigtigt at kende. Tilstedeværelsen af ler er altdominerende for nedrivningshastigheden og derved for, hvor godt et grundvandsmagasin er beskyttet. For at omsætte en resistivitsmodel til hvor mange meter ler, der er tilstede, er der defineret en såkaldt geologisk lertykkelse (GL). Den geologiske lertykkelse udtaler sig om den samlede lertykkelse i øverste 30 meter af lagpakken. Omsættelsen mellem resistivitet

og lertykkelse sker på følgende måde:

$$\text{Lag hvor } R \leq R_1 : \quad GL_1 = \sum \text{lagtykkelser}$$

Lag hvor $R_1 > R \geq R_2$:

$$GL_2 = \sum \text{lagtykkelser} \cdot \left(\frac{\log R - \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \right) \quad (9-1)$$

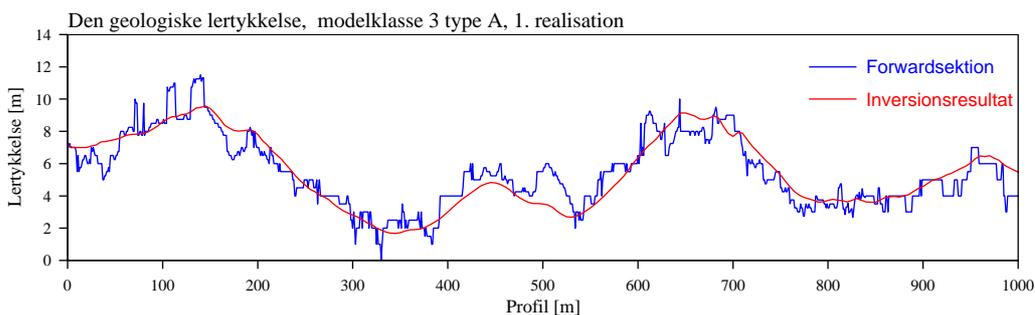
Lag hvor $R > R_2$: $GL_3 = 0$

$$GL = GL_1 + GL_2 + GL_3$$

$$R_1 = 40 \, \Omega\text{m}, \quad R_2 = 55 \, \Omega\text{m}, \quad R = \text{modelresistivitet}$$

Resistiviteter under $40 \, \Omega\text{m}$ antages at være ler (med mindre den lave resistivitet skyldes andre forhold for eksempel saltvandsindtrængning) og vægtes således med tykkelsen af laget. Resistiviteter mellem 40 – $55 \, \Omega\text{m}$ antages at have et vist lerindhold og vægtes således med tykkelsen gange en logaritmisk vægtfunktion, der løber mellem 1 og 0. Lerindholdet i lag med resistiviteter over $55 \, \Omega\text{m}$ antages at være så lille, at disse lag ikke har en beskyttende effekt, og disse lag bidrager derfor ikke til den geologiske lertykkelse.

I figur 9.2 ses den geologiske lertykkelse fra en forwardsektion og det tilhørende LCI-inversionsresultat. Som det fremgår af figuren, genfindes de langbølgede karakterer i sektionen, mens karakterer med en bølgelængde under ca. 100 meter som forventet glattes ud.



Figur 9.2: Sammenligning af den geologiske lertykkelse fra forwardsektionen og inversionsresultatet.

Resultater for, hvor godt den geologiske lertykkelse estimeres ved LCI-inversion for en række realisationer modelklasser og typer samt kommentarer hertil, præsenteres i afsnit 9.3.2.

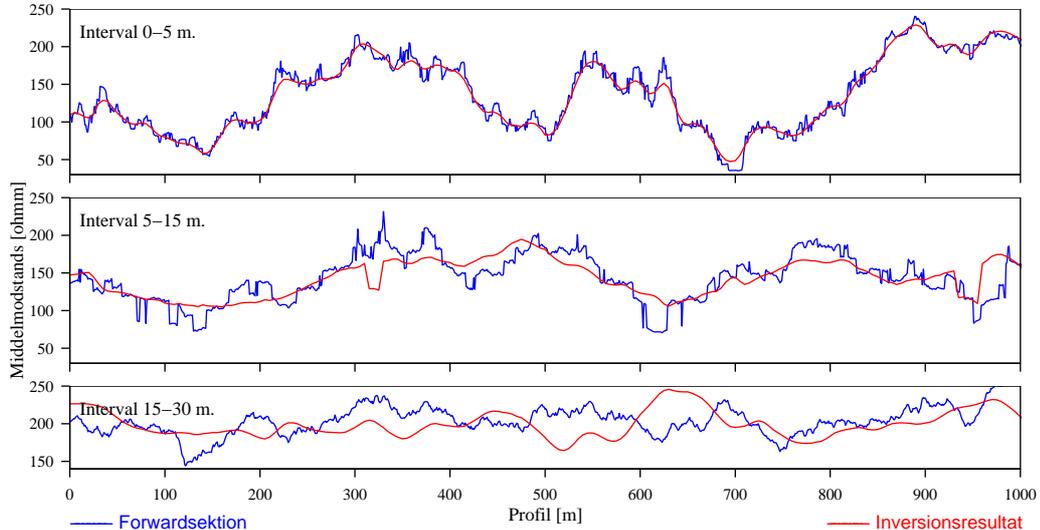
9.2.2 Middelmodstand og -ledningsevne

Som omtalt er middelmodstandskort og middelledningsevnekort en måde at præsentere tolkningerne på. Dette gøres for at opnå en 3D-visualisering af resistivitetsforholdene i det undersøgte område. Middelmodstanden-/ledningsevnen bliver normalt beregnet for tre intervaller – 0–5, 5–15 og 15–30 meter. Middelmodstanden ρ_v og middelledningsevnen σ_l i dybdeintervallet [A;B] beregnes på følgende måde:

$$\rho_v = \frac{\sum_i \rho_i \cdot d_i}{\sum_i d_i} \quad \sigma_l = \frac{\sum_i d_i / \rho_i}{\sum_i d_i} \quad (9-2)$$

d_i er tykkelsen af den del af et tolket lag, der falder inden for intervallet [A;B] og ρ_i er resistiviteten fra modelestimatiet i d_i

I beregning af middelmodstanden vil det være de høje resistiviteter, der vægtes, mens for middelledningsevnen vil det være de små resistiviteter, der vægtes mest. Ved at betragte både middelmodstanden og middelledningsevnen får man belyst, hvor godt både de høje og lave resistiviteter estimeres.



Figur 9.3: Sammenligning af middelmodstanden fra forwardsektionen og LCI-inversionsresultatet i de tre dybdeintervaller for en sektion (modelklasse 3 type A).

I figur 9.3 ses plot af middelmodstanden i de tre intervaller for én sektion. Som det fremgår af figuren, estimeres de meget kortbølgede variationer i intervallet 0–5 meter endog meget godt. For intervaller 5–15 meter er det

kun de langbølgede variationer, der kan estimeres. De relativt små variationer i forwardsektionen for det sidste middelmodstandslag kan ikke estimeres. Inversionsresultatet kommer blot ud med en meget blød middelkurve. Ovenstående forhold stemmer overens med, at opløseligheden for DC-metoden aftager med dybden.

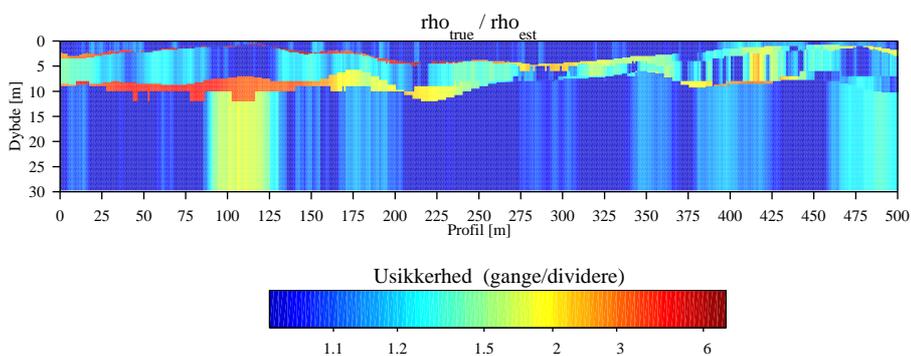
Opsummering af LCI-inversionsresultater med hensyn til estimering af middelmodstanden for alle modelklasser og typer samt kommentarer hertil omtales i afsnit 9.3.3.

9.2.3 Resistivitetsdifference

Det tredje sammenligningskriterie er en resistivitetssammenligning punkt for punkt mellem forwardsektionen og LCI-inversionsresultatet. Dette har til formål at belyse, hvor godt en sektion i helhed estimeres. Idet forwardsektionen og modelestimatet er endeligt samplet, sammenlignes resistivitetssområder på $1 \times 0,5$ (x,z) meters størrelse svarende til den mindste cellestørrelse i forwardsektionen. For hver celle udregnes forholdet mellem resistiviteterne ($C_{x,z}$) – således:

$$C_{x,z} = \exp \left\| \log(\rho_{true\ x,z}) - \log(\rho_{est\ x,z}) \right\| \quad (9-3)$$

($C_{x,z}$) er således en gange/dividere fejl på den estimerede resistivitet i den pågældende celle. I figur 9.4 ses den beregnede ($C_{x,z}$)-værdi for en modelsektion. Som det fremgår af sektionen, opnår man i de zoner, hvor laggrænserne



Figur 9.4: Forhold mellem ρ_{true} og ρ_{est} for celler af størrelsen 1×0.5 meter. Forholdet kan betragtes som en gange/dividere fejl på ρ_{est} .

estimeres forkert, meget store fejl. I disse zoner vil estimeringsfejlen nogle steder nå helt op på en faktor 60 – for eksempel hvis $10 \Omega\text{m}$ sammenlignes med $600 \Omega\text{m}$. Et middelskøn over estimeringsfejlen for hele sektionen er derfor ikke specielt repræsentativ, da få celler vil bidrage meget til middelestimeringsfejlen. Zonerne med meget høj estimeringsfejl er ikke et udtryk for, at

modelestimatet er meget dårligt, men skyldes blot, at laggrænserne er estimeret nogle meter forkert. Resultaterne fra sammenligninger af resistiviteter i modelsektionerne bliver derfor præsenteret som, hvor stor en procentdel af sektionen, der er estimeret med en given fejl opdelt i intervaller – som vist i for eksempel figur 9.22.

Resultater af resistivitetssammenligningen for alle modelklasserne samt kommentarer hertil præsenteres i afsnit 9.3.4.

9.3 Resultater

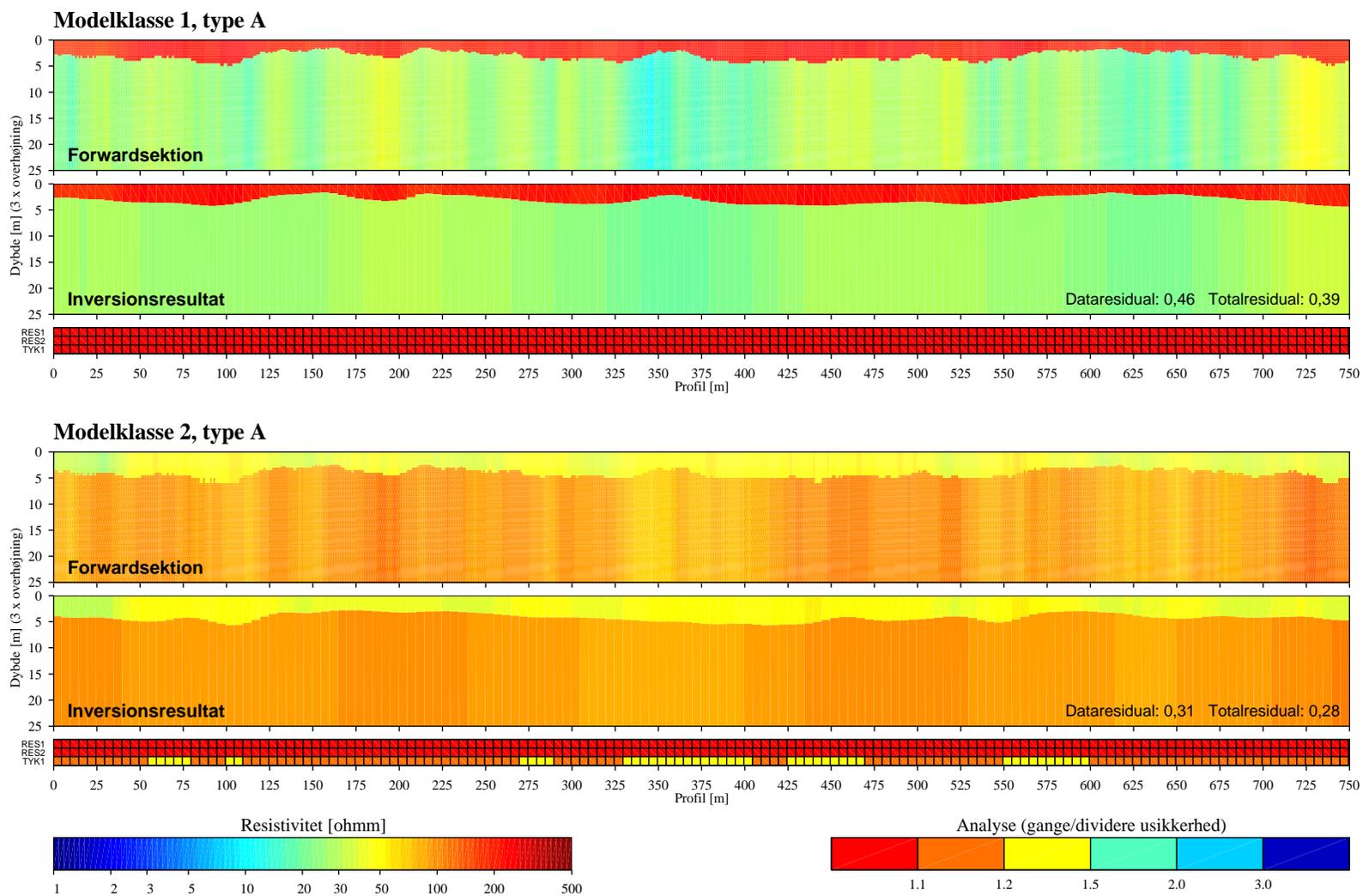
9.3.1 Eksempler på LCI-inversionsresultater

I det følgende vil der blive vist eksempler på forwardsektioner og tilhørende LCI-inversionsresultater fra alle modelklasserne og af alle typer. Der kommenteres ud fra en visuel vurdering af, hvor godt et estimat inversionsresultatet er af forwardsektionen. Der er i LCI-inversionen brugt det i afsnit 8.2 fundne sæt af laterale bånd på 0,1 for resistiviteter og 0,3 for dybder.

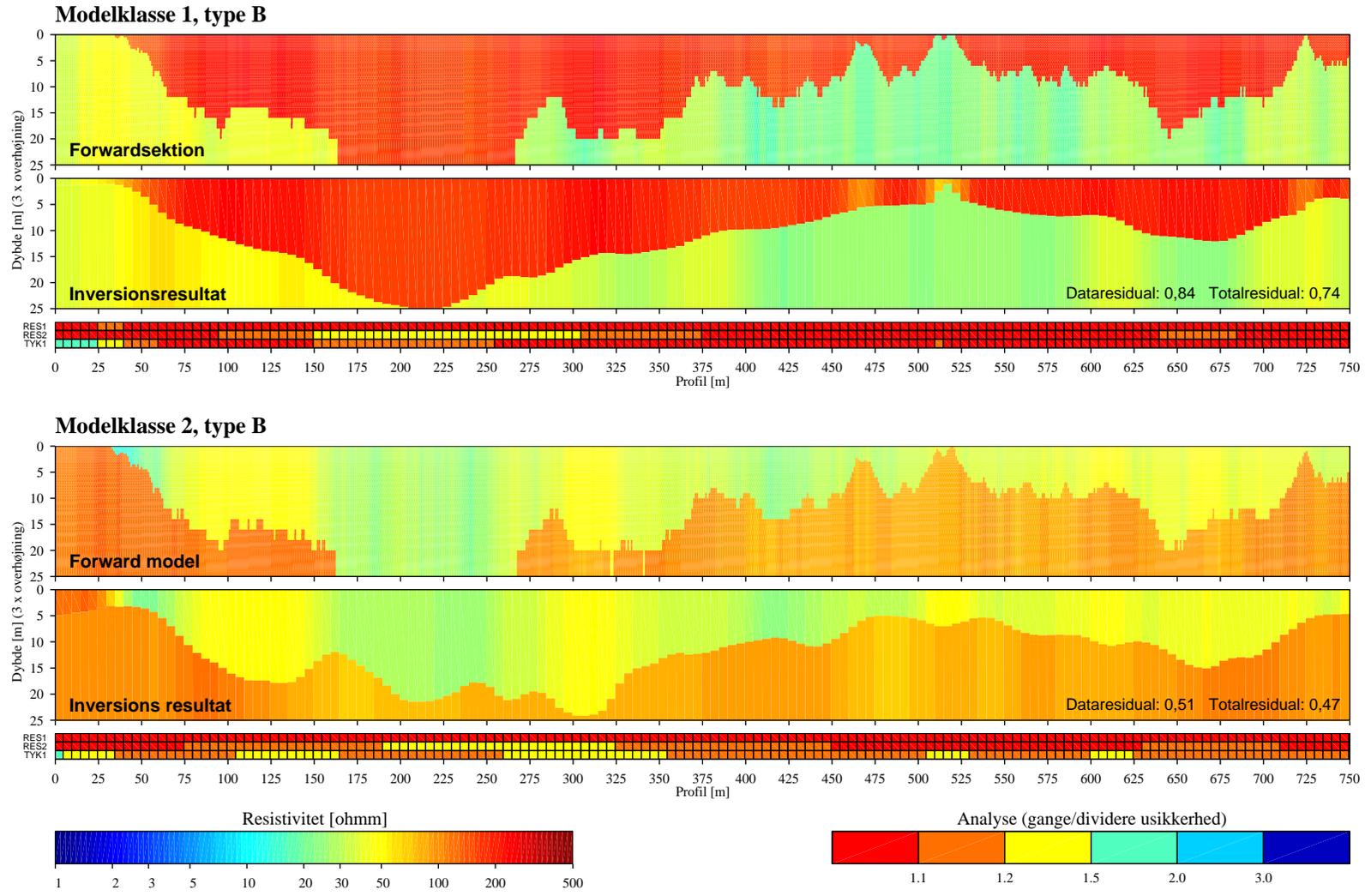
Øverst i figur 9.5 er der angivet modelklasse og type. Derefter forwardsektionen (750 m. af 1000 m.) og LCI-inversionsresultatet med tilhørende variansanalyse for modelparametrene samt data- og totalresidualet. Som det fremgår af forwardsektionerne i figur 9.5 til 9.12 er forwardsektionen inden for hver type genereret ud fra den nøjagtigt samme statistiske fordeling; der er blot anvendt forskellige udgangsresistiviteter for de enkelte modelklasser. Således er det muligt at lave en klar sammenligning de enkelte modelklasser i mellem.

I figur 9.5 ses forwardsektion og inversionsresultat for modelklasse 1 og 2 type A, som repræsenterer 2-lagssektioner med “langsomt” varierende resistiviteter og laggrænser. Inversionsresultatet estimerer forwardsektionen godt med den forventede glatning af resistiviteter og laggrænsen. Ud fra analysen ses det, at modelparametrene i modelklasse 1 opløses lidt bedre end i klasse 2. Dette skyldes primært, at der i en nedstigende model løber en relativt større del af strømmen i bundlaget i den opstigende model, og der er således mere information tilgængelig om bundlaget i den nedstigende modeltype.

Figur 9.6 indeholder forwardsektion og LCI-inversionsresultatet for type B for de to 2-lagsmodelklasser. Som det fremgår af forwardsektionerne i figuren er variationer i resistiviteter såvel som i laggrænsen væsentligt kraftigere end i den foregående type. Inversionresultaterne udviser også en kraftig glatning af laggrænsen. I de første ca. 100 meter af forwardsektionerne er laghældningen stejlere, end hvad der ifølge afsnit 8.3 kan estimeres. Inversionsresultaterne fremkommer da også med en væsentlig mindre hældning. Som for modelklasse 1 og 2 type A, er det også for type B den nedstigende 2-lagsmodelsektion, der opløses bedst. Dette ses specielt i områder 100–150 meter, hvor andet lag ligger relativt dybt med deraf følgende mindre information om dette lag.



Figur 9.5: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analysen for de koblede modelparametre for modelklasse 1 og 2 type A (750 m. af 1000 m.).



Figur 9.6: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analysen for de koblede modelparametre for modelklasse 1 og 2 type B (750 m. af 1000 m).

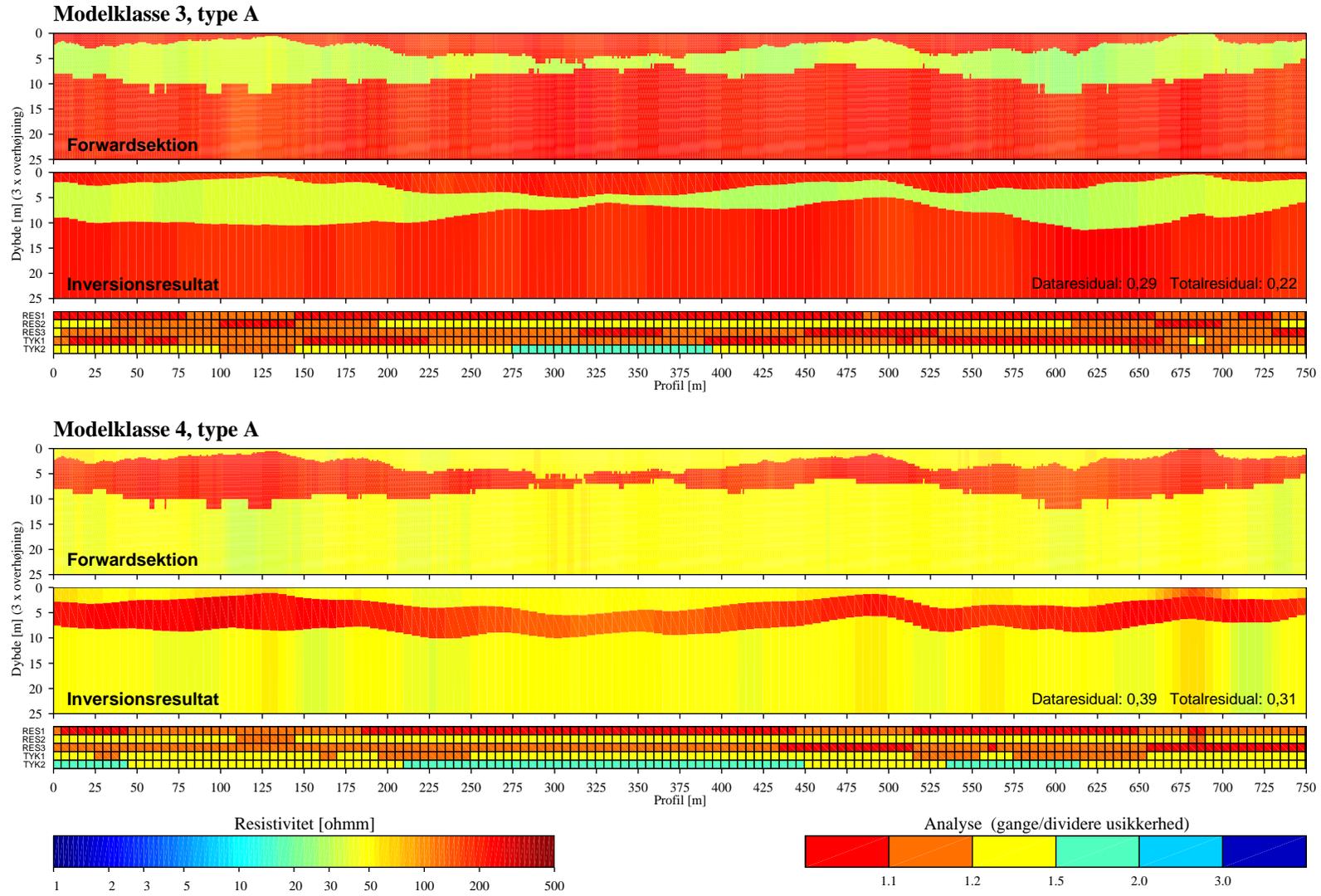
Generelt estimeres 2-lagsmodeller overordentligt godt, hvilket primært skyldes datas gode opløsning af modellerne. For 3-lagsmodellernes (modelklasse 3–6) vedkommende må det forventes, at inversionsresultaterne er knapt så gode, idet der for 3-lagsmodellerne i højere grad er ækvivalens- og/eller lagundertrykkelsesproblemer inde i billedet.

Modelestimaterne for type A for 3-lagsmodellerne som vist i figur 9.7 og 9.8 er generelt tilfredsstillende. Som det fremgår af analyserne opløses modelparametrene selvfølgelig ikke så godt som for 2-lagsmodellernes vedkommede. Taget de lav- og højmodstandsækvivalente tilfælde, som forwardsektionen indeholder, i betragtning, er inversionsresultaterne forbløffende gode. I lighed med 2-lagsmodellerne opløses sektionen bedre når det lag der er mindst information om (det ækvivalente lag for modelklasse 3 og 4 – bundlaget for modelklasse 5 og 6 type A), er et lavmodstandslag.

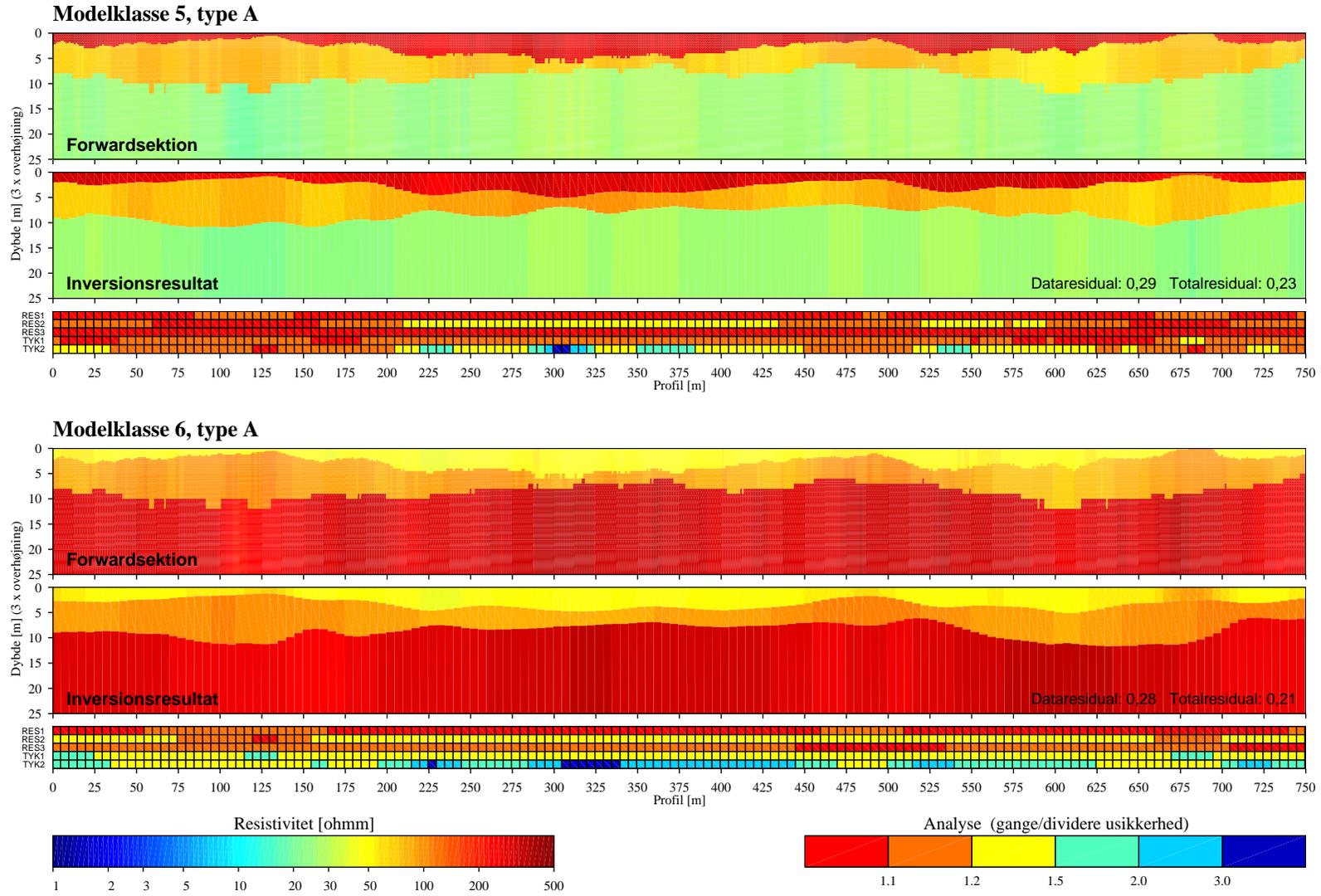
I figur 9.9 og 9.10 ses forwardsektioner og inversionsresultater for type C – typen med de stærkt fluktuerende laggrænser. Specielt de første ca. 100 meter i sektionerne for modelklasse 3, type C (figur 9.9) viser de problemer, der kan opstå ved at sammenbinde modelparametrene. Her får man koblet lagene forkert sammen, og andet lag underlægges en kraftig resistivitetsvariation for at tilpasse data. Dette problem kan eventuelt afhjælpes ved at starte inversionen med en anden startmodel. Herved vil man måske opnå et laggrænseforløb som i figur 9.10, hvor lagrækkefølgen i inversionsresultatet stemmer overens med forwardsektionen. Det er dog ikke sikkert, at man ud fra inversionsresultatet kan indse, hvilken startmodel der vil resultere i et bedre inversionsresultat og eventuelt lavere residual. Selv om inversionsresultaterne fra de fire modelklasser af type C ser noget kaotiske ud, genfindes de væsentligste forhold. Således estimeres hullerne i den øverste del af forwardsektionen i alle fire tilfælde, og sammenholdt med analysen estimeres resistiviteten i de dybereliggende lag på tilfredsstillende vis.

Til trods for at forwardsektionerne i type C indeholder variationer for laggrænser, der til tider falder uden for antagelser om langsomt varierende geologi, er modelestimaterne, som LCI-inversionen fremkommer med, acceptable.

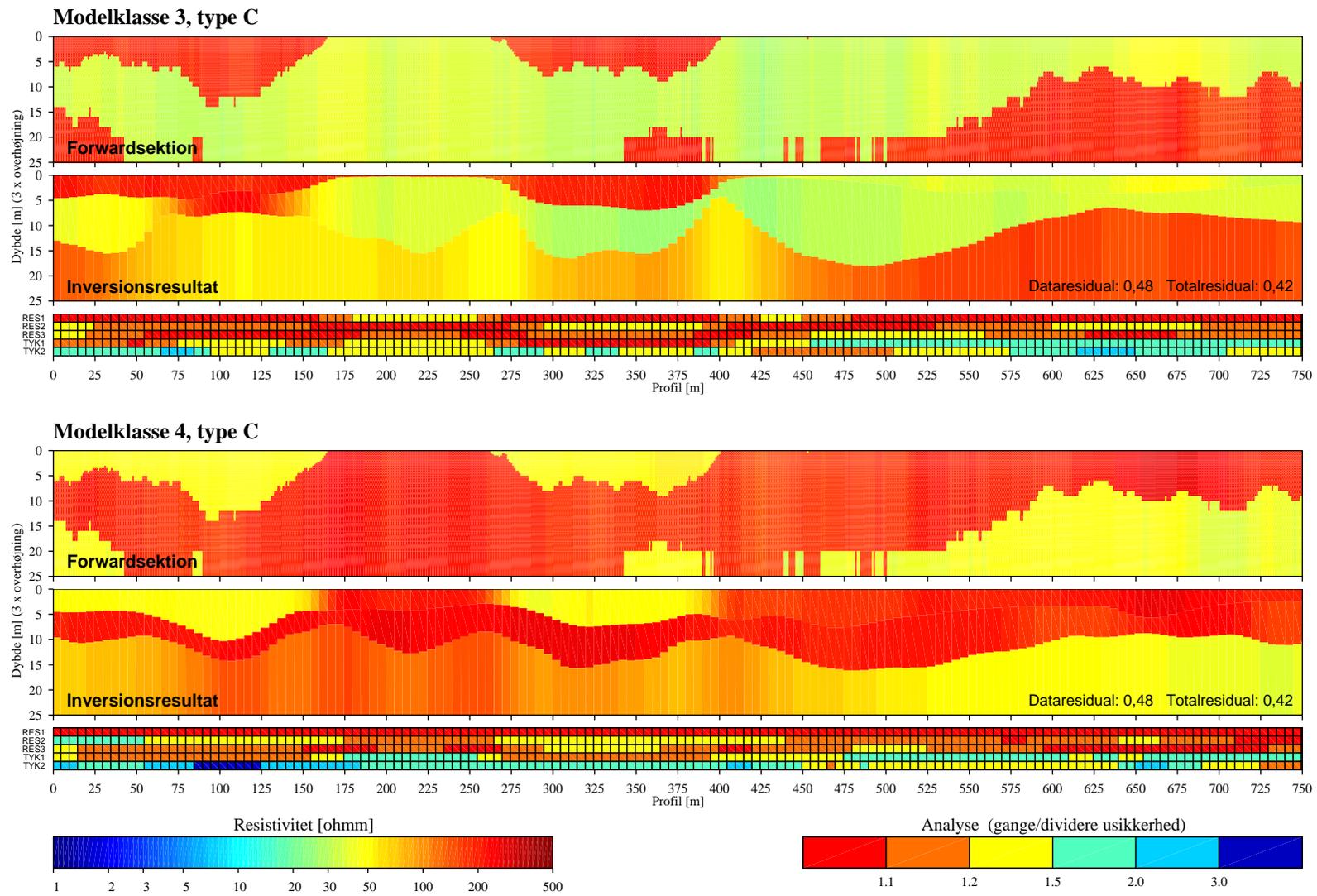
Inversion- og forwardsektioner for type D for modelklasse 4–6 vises i figur 9.11 og 9.12. Til trods for de meget kraftige variationer i resistiviteter udviser inversionsresultaterne stor lighed med forwardsektionerne; selvfølgelig med en udglatning af de relativt skarpe resistivitetskontraster. Specielt kraftige resistivitetskontraster i den dybereliggende del af en sektion udglattes relativt meget. Dette skyldes dels, at informationen om den dybereliggende del er relativt begrænset, dels at fokuseringen aftager med dybden. Ovennævnte ses blandt andet i figur 9.11 ved ca. 525 meter i begge inversionsresultater. Sammenlignet med type C er inversionsresultaterne for type D bedre. LCI-inversionen er altså mere robust over for kraftige variationer i resistiviteter end over for kraftige variationer i laggrænser.



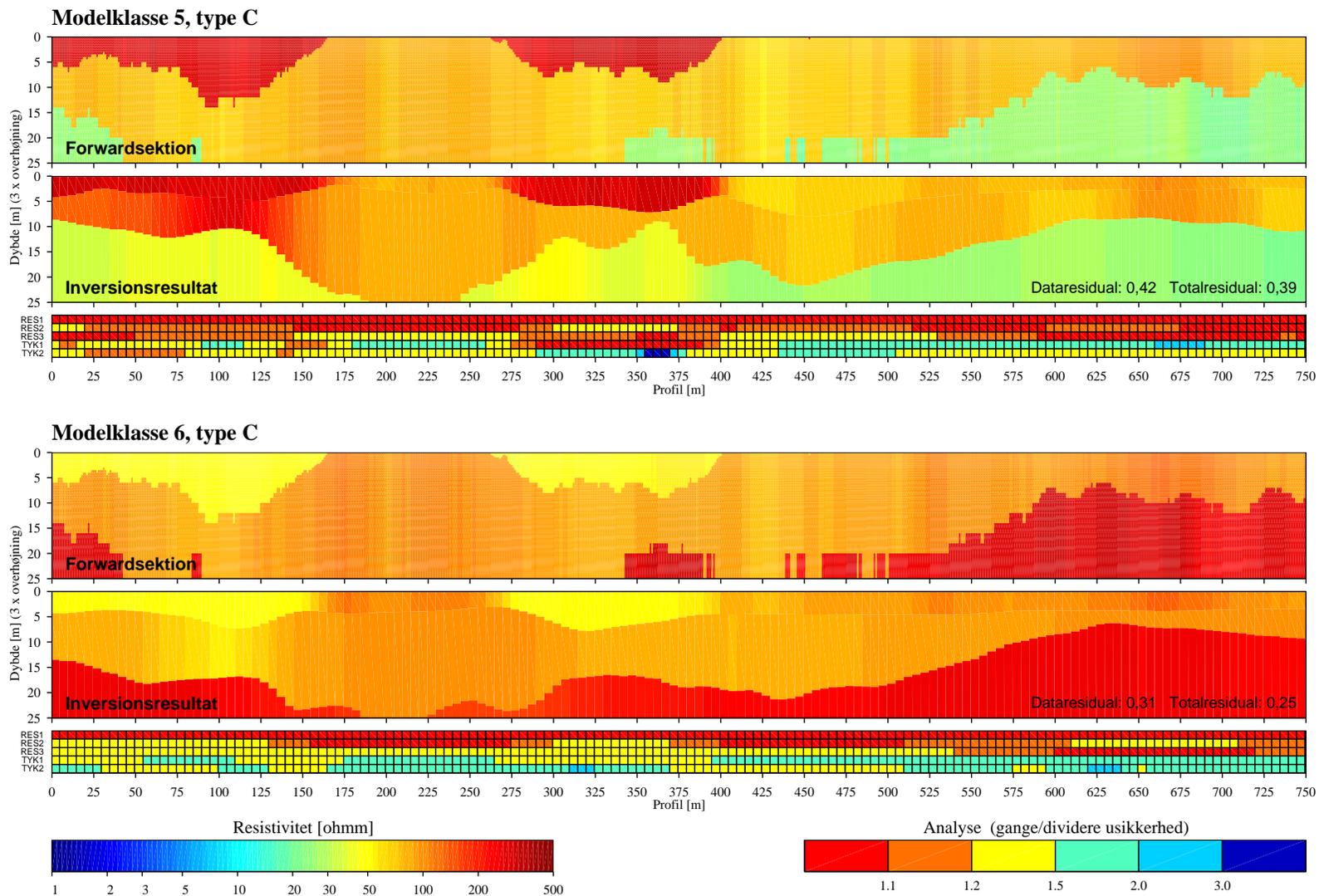
Figur 9.7: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analyse for de koblede modelparametre for modelklasse 3 og 4 type A (750 m. af 1000 m.).



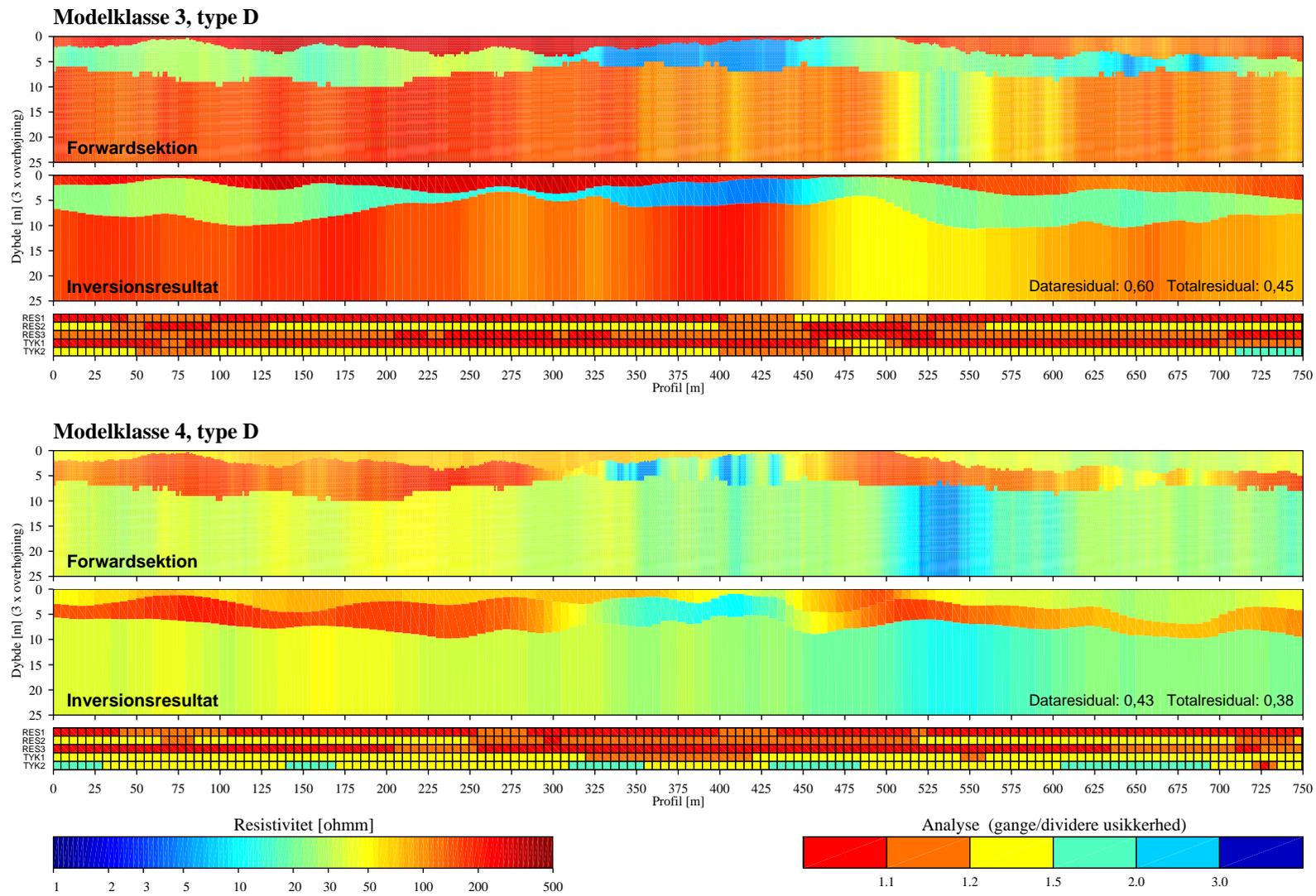
Figur 9.8: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analysen for de koblede modelparametre for modelklasse 5 og 6 type A (750 m. af 1000 m.).



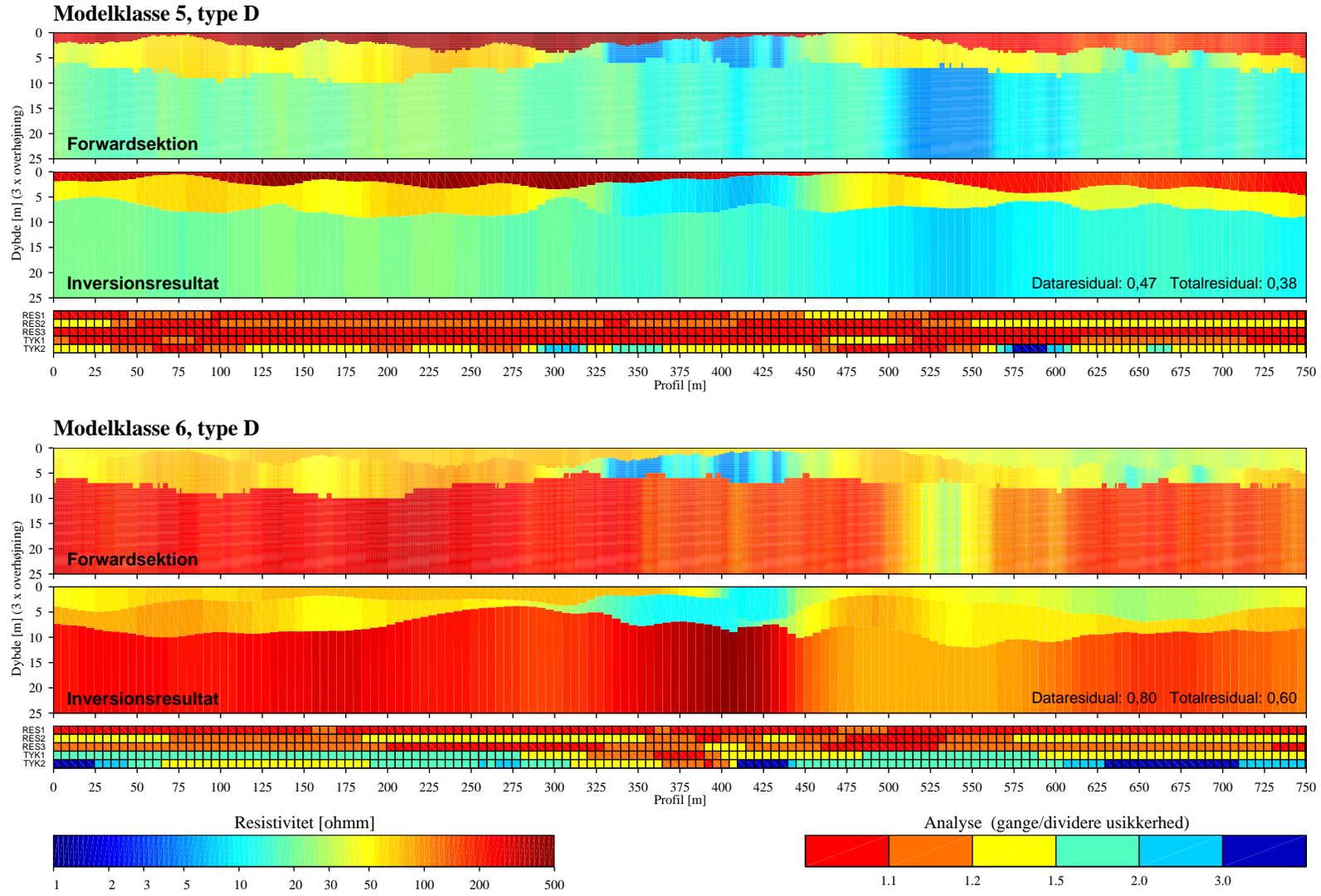
Figur 9.9: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analyse for de koblede modelparametre for modelklasse 3 og 4 type C (750 m. af 1000 m.).



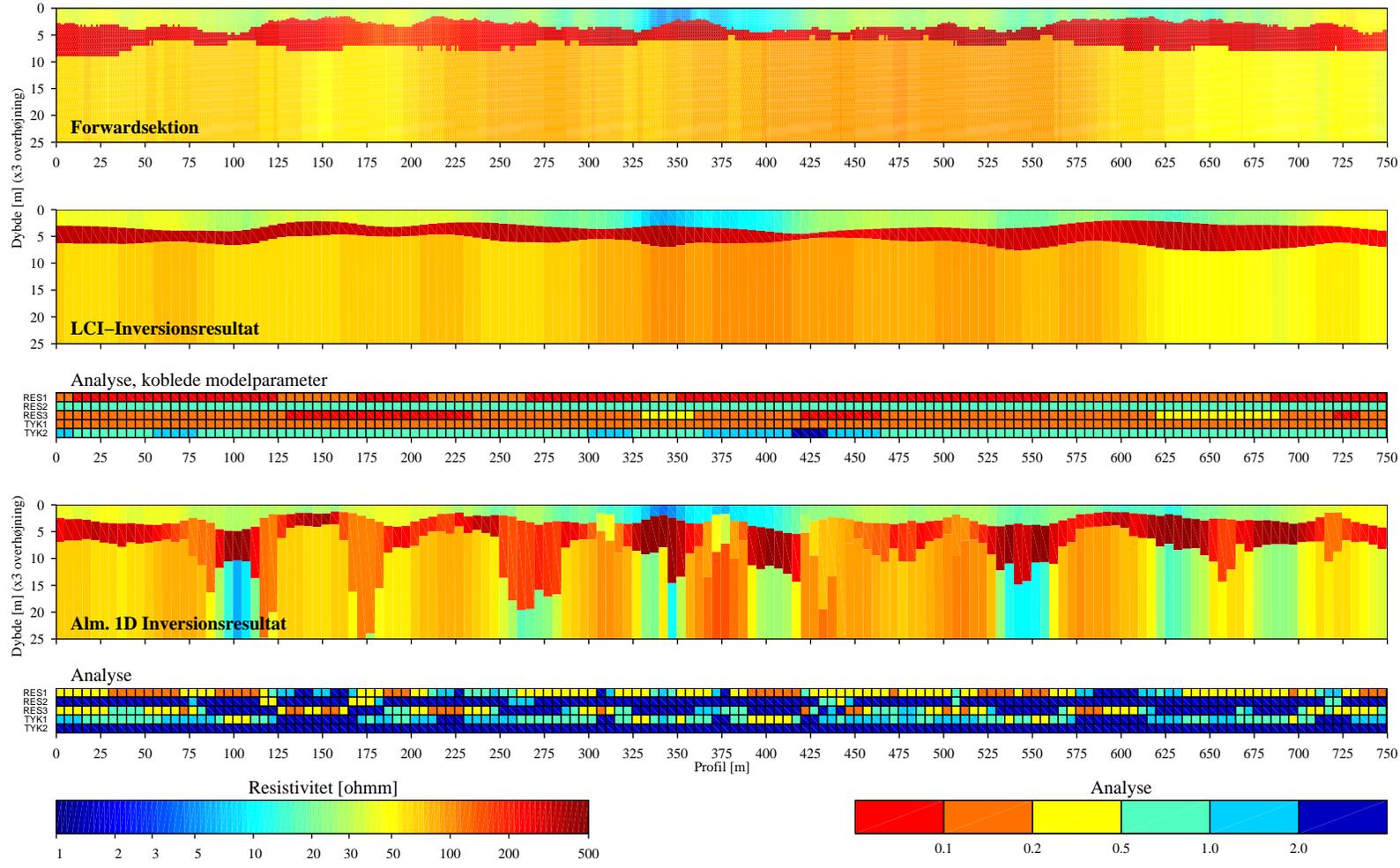
Figur 9.10: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analysen for de koblede modelparametre for modelklasse 5 og 6 type C (750 m. af 1000 m.).



Figur 9.11: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analysen for de koblede modelparametre for modelklasse 3 og 4 type D (750 m. af 1000 m.).



Figur 9.12: Forwardsektion, LCI-inversionsresultat samt analysen for de koblede modelparametre for modelklasse 5 og 6 type D (750 m. af 1000 m.).



Figur 9.13: Eksempel på forskellen mellem LCI-inversion og almindelig 1D-inversion. A: Forwardsektion, B: LCI-inversionsresultat og tilhørende analyse, C: Inversionsresultat fra alm. 1D-inversion og tilhørende analyse.

Inversionsresultaterne i figur 9.13 viser klart, at LCI-inversionsmetoden er en forbedring i forhold til almindelig 1D-inversion. Sammenlignes de to variansanalyser i figuren ses også, at modelparametrene er langt bedre bestemt ved LCI-inversionen end ved den almindelige 1D-inversionsmetode. Resistiviteten og tykkelsen af andet lag må for LCI-sektionens vedkommende dog stadig betragtes som værende ubestemte. Til gengæld ses en markant bedre bestemmelse af tykkelsen af første lag og af resistiviteten i tredje lag i LCI-inversionen. Forwardsektionen i figur 9.13 er den type, hvor LCI-inversionsmetoden har sin force (ækvivalente modeller med langsomt varierende laggænsere). For modeltyper, hvor data i højere grad er i stand til at opløse de enkelte modeller, vil fordelene ved LCI-inversion ikke være så fremtrædende som i det viste eksempel.

Det er nu visualiseret gennem de sidste mange figurer, at LCI-inversionen frembringer inversionsresultater med tilfredsstillende lighed med forwardsektionen. Endvidere er det vist, at LCI-metoden er bedre til at håndtere modelsektioner, der varierer kraftigt i resistivitet end modelsektioner, der varierer kraftigt i lagtykkelser. I de følgende afsnit kvantificeres lighedsgraden mellem forwardsektionen og inversionsresultatet ud fra de omtalte kriterier.

9.3.2 Estimering af den geologiske lertykkelse

For hver type i alle modelklasserne er der lavet 10 realisationer. Hver realisation repræsenterer således et LCI-inversionsresultat fra en forwardsektion på 1000 meter (200 sonderinger). Ved at sammenligne den geologiske lertykkelse fra forwardsektionen med inversionsresultaterne, er det på baggrund af de 10 realisationer muligt at opstille statistiske udsagn om, hvor godt den geologiske lertykkelse estimeres. I figur 9.14 ses resultaterne af sammenligningerne af den geologiske lertykkelse fra forwardsektionerne og LCI-inversionresultaterne¹ for modelklasse 1 og 2, type A og B (2-lagsmodelsektionerne). Den røde kurve i de fire plot angiver middeldifferencen mellem den sande geologiske lertykkelse og den estimerede geologiske lertykkelse for de 200 sonderinger i en sektion. Differencen er ikke gjort relativ, da den sande lertykkelse kan være nul. Middeldifferencen **mean** for hver realisation er beregnet på følgende måde:

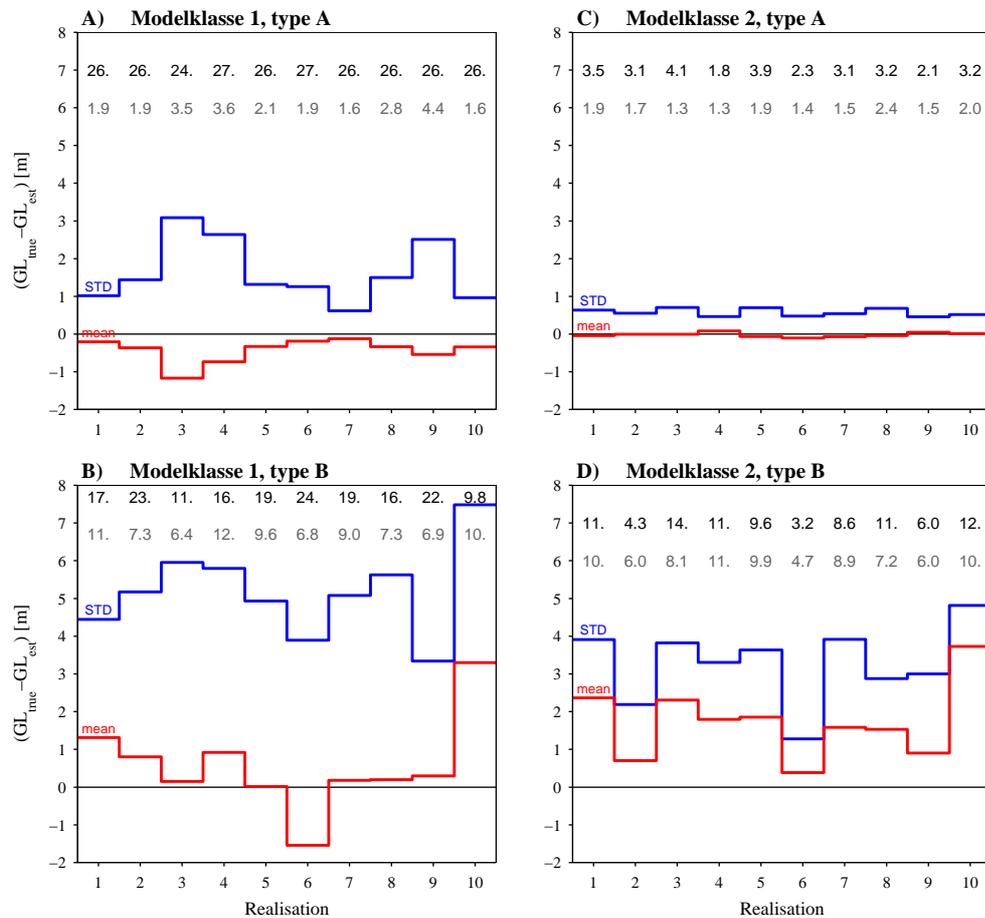
$$\bar{X} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} GL_{true,i} - GL_{est,i} \quad (9-4)$$

og standardafvigelsen **STD** på middeldifferencen er da givet ved:

$$STD = \frac{1}{200 - 1} \sum_{i=1}^{200} (\bar{X} - (GL_{true,i} - GL_{est,i}))^2 \quad (9-5)$$

¹Alle LCI-inversionerne er foretaget med laterale bånd på resistiviteter på 0,1 og 0,3 for dybder.

De øverste sorte tal i hvert plotvindue i figur 9.14 angiver middellertykkelsen i forwardsektionen, og rækken af grå tal under angiver standardafvigelsen herpå. Disse tal er blot medtaget for at vise den aktuelle lertykkelse, samt hvor store variationerne i forwardsektionerne er. Er middeldifferencen for eksempel nul, vil det sige, at de 200 sonderinger i inversionssektionen i middel estimerer den sande geologiske lertykkelse, – er middelværdien derimod 1,5, estimeres der i middel for sektionen 1,5 meter ler for lidt. Standardafvigelsen kan betragtes som fejlen på lertykkelsesestimatet i meter ler for de enkelte sonderinger.



Figur 9.14: \square Middeldifferencen mellem den sande geologiske lertykkelse og den estimerede for de 200 sonderinger i hver af de ti realisationer.

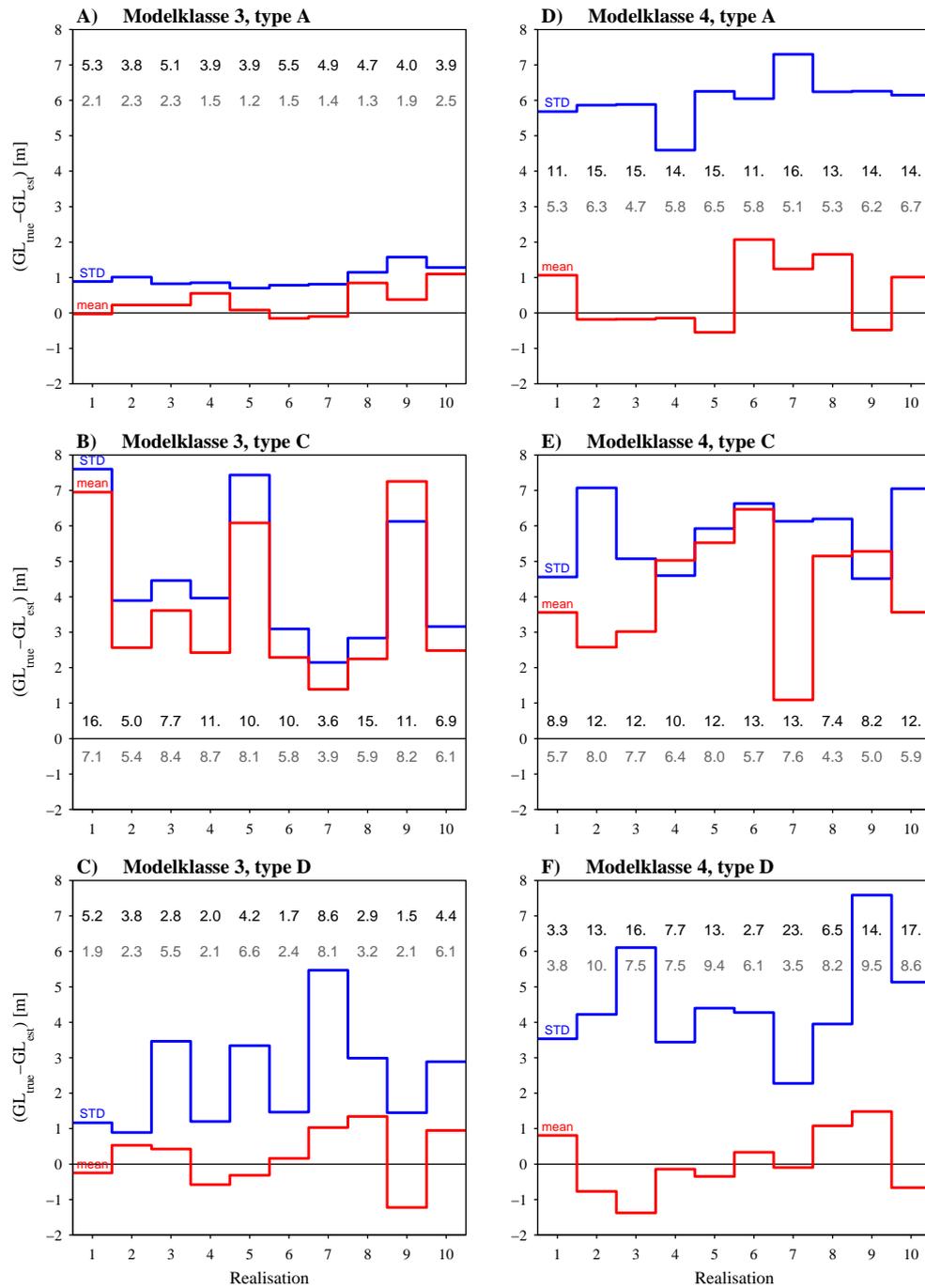
\square Standardafvigelsen på middeldifferencen. De sorte tal ud for hver realisation angiver middellertykkelsen i forwardsektion, mens de understående grå tal angiver standardafvigelsen herpå.

Som det fremgår af plot A, estimeres der i middel for modelklasse 1 type A ca. 0,5 meter ler for lidt med en standardafvigelse på ca. 2 meter – det vil

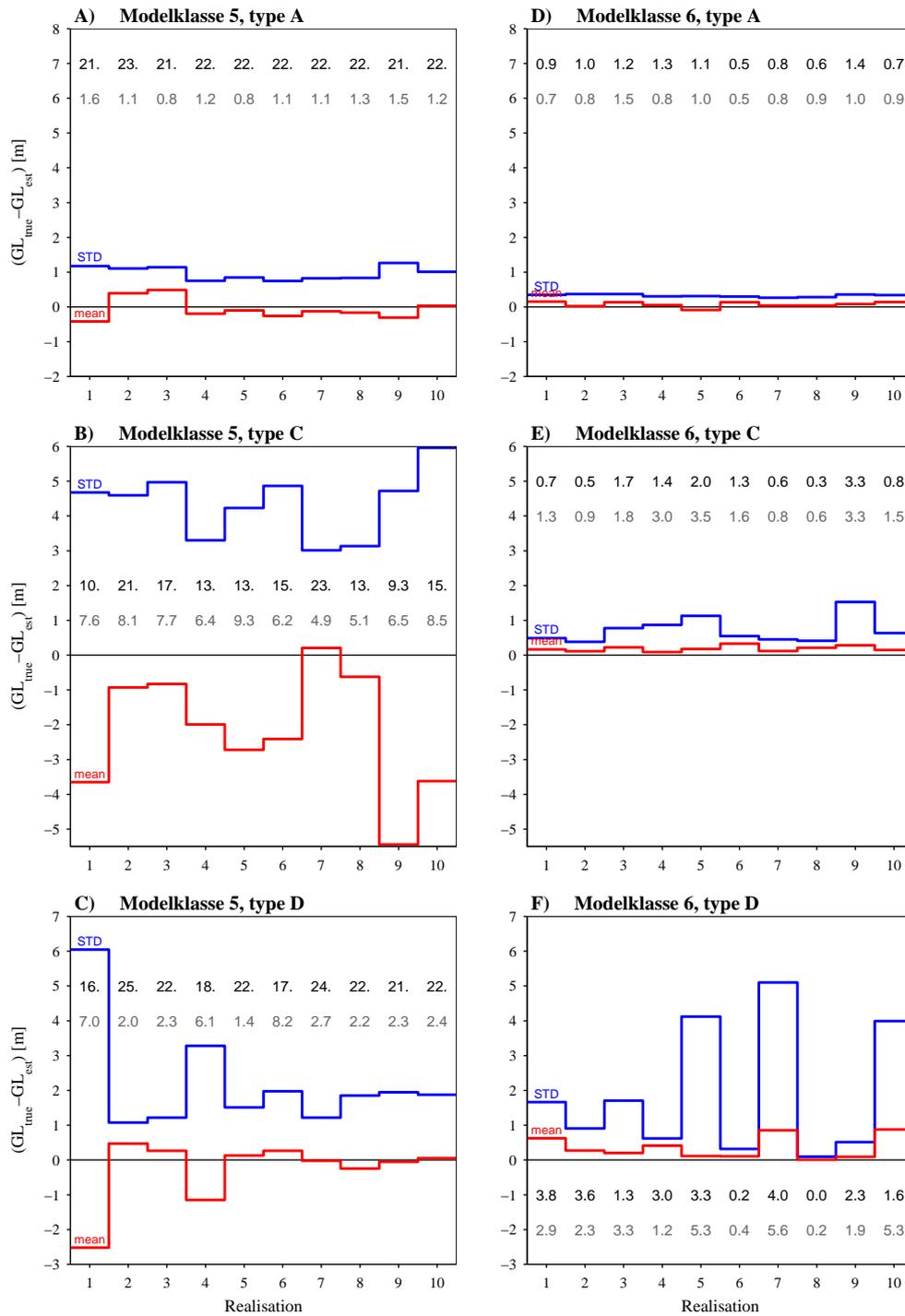
sige, at man kan antage, at estimeringsfejlen på den geologiske lertykkelse for de enkelte sonderinger er 2 meter. Idet den aktuelle lertykkelse er på ca. 26 meter er lertykkelsesestimater meget tilfredsstillende. For modelklasse 1, type A (plot C) estimeres den geologiske lertykkelse stort set perfekt. Estimering af lertykkelsen for modelklasse 1 og 2 type B (plot B og D) er som forventet dårligere end for type A. Type B repræsenterer 2-lagssektioner, hvor resistiviteten og laggrænserne varierer meget, hvilket også resulterer i kraftige variationer i den geologiske lertykkelse, som de grå tal indikerer. En estimeringsfejl på den geologiske lertykkelse på 4–6 meter, som type B sektionerne udviser, virker voldsom. Dog skal det tages i betragtning, at udsagnet gælder i punktet – det vil sige én sondering, der i lateral udbredelse kun repræsenterer 5 meter. At udtale sig om lertykkelser i 5 meters intervaller er nok noget dristigt og har ikke den store hydrogeologiske relevans. Normalt ønsker man udtale sig om den geologiske lertykkelse i større intervaller – 200–300 meter.

Statistisk set falder estimeringsfejlen med kvadratroden af antallet af uafhængige observationer. Et 200 meters interval med en sonderingstæthed på 5 meter indeholder 40 observationer, og estimeringsfejlen vil derfor blive reduceret med en faktor $\sqrt{40} \approx 6$. Dette er dog et for optimistisk bud i denne situation, idet observationerne ikke er uafhængige – to på hinanden følgende sonderinger har en stor del information om resistivitetsfordelingen til fælles. Man kan således påregne en vis reduktion i estimeringsfejlen på den geologiske lertykkelse, når man betragter et større interval, der dog ikke er så stort som kvadratroden af antal observationer. Med dette in mente ses der i det følgende nærmere på, hvor godt den geologiske lertykkelse estimeres for modelklasse 3 og 4 (figur 9.15).

Som ved den visuelle vurdering af inversionsresultaterne er det også type A, (figur 9.15 A og D), der resulterer i de mest succesfulde resultater for estimeringen af den geologiske lertykkelse, og type C (figur 9.15 B og E), der resulterer i de mindst succesfulde. At standardafvigelsen er væsentlig større for modelklasse 4 type A end for modelklasse 3 type A skyldes, dels at den aktuelle geologiske lertykkelse er større for modelklasse 4, dels at lerbidraget til den geologiske lertykkelse for modelklasse 4 stammer fra to lag, der ligger og varierer omkring 50 Ωm . Da grænsen for, om en resistivitet bidrager til den geologiske lertykkelse, jf. (9-1), er ved 55 Ωm , vil en estimeringsfejl på resistiviteter, der ligger omkring denne grænse have relativt stor indflydelse på, hvor godt den geologiske lertykkelse estimeres. Hvis for eksempel en resistivitet på 40 Ωm estimeres 30% for højt, går den fra at bidrage med vægtning 1 i den geologiske lertykkelse i den sande model til ikke at bidrage til den geologiske lertykkelse i den inverterede model. Dette er ikke tilfældet med en resistivitet på for eksempel 10 eller 200 Ωm . Den omtalte skalering i tykkelser og resistiviteter i DC-problemet gælder altså ikke, når den geologiske lertykkelse betragtes.



Figur 9.15: □ Middeldifferencen i hver af de ti realisationer. □ Standardafvigelsen på middeldifferencen.



Figur 9.16: ▭ Middeldifferencen i hver af de ti realisationer. ▭ Standardafvigelsen på middeldifferencen.

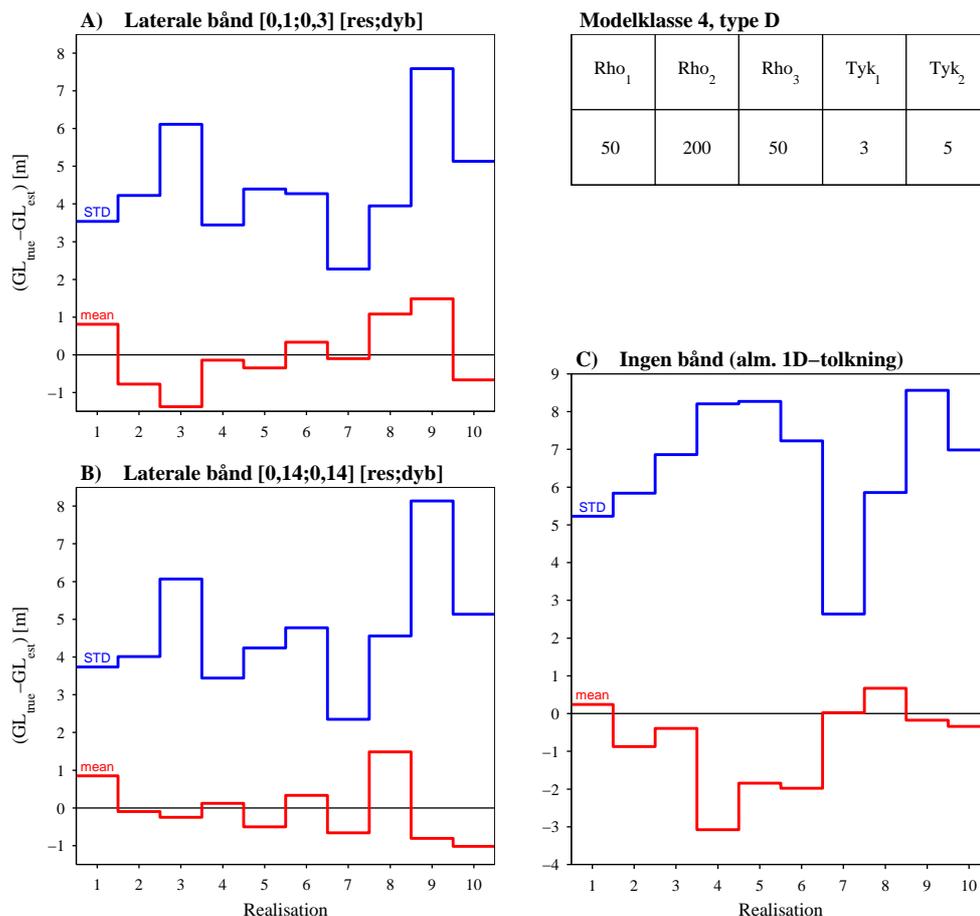
Plot B og D i figur 9.15 viser resultaterne for forwardsektionerne med stærkt varierende laggrænser (type C). I middel estimeres der for lille en lertykkelse og standardafvigelsen er også relativt stor. For forwardsektionerne med stærkt varierende resistiviteter (type D), er estimeringen af den geologiske lertykkelse langt bedre. Som det fremgår af plot C og F i figur 9.15 svinger middeldifferencen omkring nul.

I figur 9.16 vises på samme måde som i figur 9.15 resultaterne vedrørende estimering af den geologiske lertykkelse her for modelklasse 5 og 6. Modelklasse 6 (plot D-F) har ikke den store relevans, idet den aktuelle geologiske lertykkelse er meget lille. De tre typer i modelklasse 5 udviser samme trend som modelklasse 3 og 4; dog ses i plot B, at man er kommet i den uheldige situation, at man i middel får estimeret for mange meter ler.

I afsnit 8.2 blev det besluttet at fortsætte med to sæt af de laterale bånd, primært for at belyse, hvor kritisk valg af størrelsen af sammenbindingerne er. Som det fremgår af plot A og B i figur 9.17, er der ikke væsentlig forskel på resultaterne for de to af sæt laterale bånd. Dette er generelt for alle modelklasser og typer. I 9.17 C er der endvidere vist resultater for inversion uden laterale bånd for de 10 realisationer. Som forventet bliver standardafvigelsen væsentligt større, når der inverteres uden laterale bånd. Hvor stor gevinsten er ved LCI-inversion, frem for ved inversion uden laterale bånd med hensyn til estimering af den geologiske lertykkelse, afhænger i høj grad af, hvor godt de lag, der bidrager til den geologiske lertykkelse, er opløst. Hvis lerbidraget til den geologiske lertykkelse for eksempel stammer fra 10 Ωm toplag, vil gevinsten ved LCI-inversion ikke være så stor som i det viste eksempel i figur 9.17.

Konklusionen på undersøgelserne af, hvor godt den geologiske lertykkelse estimeres ved LCI-inversion er følgende:

- For forwardsektioner med langsomt varierende geologi (type A) genfindes i middel den geologiske lertykkelse. Estimeringsfejlen er oftest meget lav (1–2 meter) for de enkelte observationer. Hvor lerbidraget kommer fra lag med resistivitet omkring lerbidragsgrænsen, bliver estimeringsfejlen dog større (op til 6 meter). Med den reduktion i estimeringsfejlen, man opnår, når man betragter et større område, bliver estimeringen af den geologiske lertykkelse for type A sektionerne gode.
- Estimeringen af den geologiske lertykkelse er klart bedre for modeltypen med kraftigt varierende resistiviteter (type D) end for typen med kraftigt varierende laggrænser (type C).
- Når der betragtes et større interval, falder estimeringsfejlen på lertykkelsesestimatet. Fejlen på estimatet reduceres dog ikke med kvadratroden af antallet af observationer, idet sonderingerne ikke er uafhængige, men med en faktor, der er mindre end dette.



Figur 9.17: □ Middeldifferencen for de ti realisationer. □ Standardafvigelsen på middeldifferencen. A: Inversion med laterale bånd på resistiviteter 0,1 og dybder på 0,3. B: Laterale bånd på resistiviteter og dybder på 0,14. C: Ingen laterale bånd

- De absolutte resistivitetstværdier har stor betydning. Et relativt lille fejlskøn af en resistivitet, der ligger tæt på bidragsgrænsen til den geologiske lertykkelse, kan medføre en relativt stor forskel mellem den sande geologiske lertykkelse og den estimerede.
- LCI-inversionen bevirker entydigt bedre estimering af den geologiske lertykkelse i forhold til inversion uden laterale bånd. Dog er gevinsten ved at benytte LCI-inversionsmetoden i høj grad afhængig af, hvor godt de lag, der bidrager til den geologiske lertykkelse, er opløst.
- Styrken af de laterale sammenbindinger er ikke kritisk for inversionsresultatet. De to testede sæt af laterale bånd resulterer i stort set lige succesfulde estimeringer af den geologiske lertykkelse.

9.3.3 Estimering af middelmådsstandslag

I det følgende vises resultaterne af sammenligningerne af middelmådsstanden fra forwardsektionen med inversionsresultatet for de ti realisationer i hver modelklasse og type. For hver realisation er der tre parametre at sammenligne – middelmådsstanden i de tre intervaller.

I figur 9.18 ses plot af middelforholdet mellem middelmådsstanden i forwardsektioner og middelmådsstanden fra inversionsresultatet for de tre intervaller.

De øverste tre kurver i for eksempel plot B angiver således middelforholdene for de ti realisationer. Den \square -kurve for intervaller 0–5 meter, den \square for intervallet 5–15 meter og \square for intervallet 15–20 meter. Den tilhørende standardafvigelse på middelforholdet er angivet nederst i plotvinderne med mørkere farver.

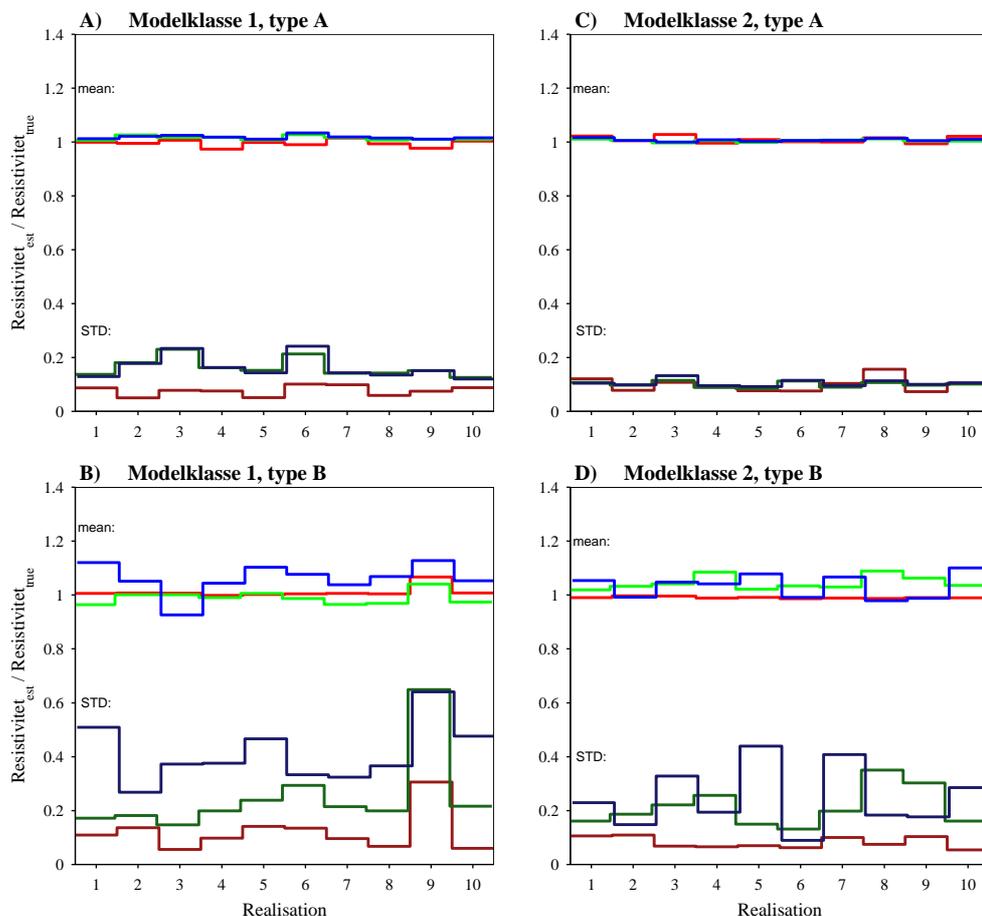
Middelforholdet for hver realisation er udregnet på følgende måde:

$$\bar{X} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} \left(\frac{\rho_{v \text{ est},i}}{\rho_{v \text{ true},i}} \right) \quad (9-6)$$

Standardafvigelsen på middelforholdet kan opfattes som en gange/dividere fejl på de enkelte observationer i en realisation. Som for de geologiske lertykkelser kan det også påregnes, at estimeringsfejlen falder, når et større interval betragtes.

I figur 9.18 ses resultaterne af sammenligninger af middelmådsstanden for modelklasse 1 og 2, type A og B (2-lagsmodellerne). For den langsomt varierende type A (plot A og C) estimeres middelmådsstanden næsten perfekt i alle tre intervaller. Standardafvigelsen for andet og tredje interval er næsten sammenfaldende. Dette skyldes, at laggrænsen svinger omkring en dybde på fire meter, og middelmådsstanden vil derfor være den næsten samme i intervallet 5–15, som 15–30 meter. I figur 9.18 plot B og D ses resultater for type B. Som forventet estimeres middelmådsstandslagene dårligere her. Middelmådsstanden i første interval (\square) estimeres bedst, idet metoden har den bedste opløsningsevne i den øvre del af lagpakken. Ligeledes bliver estimeringsfejlen også mindst for det første middelmådsstandsinterval og størst for det sidste interval.

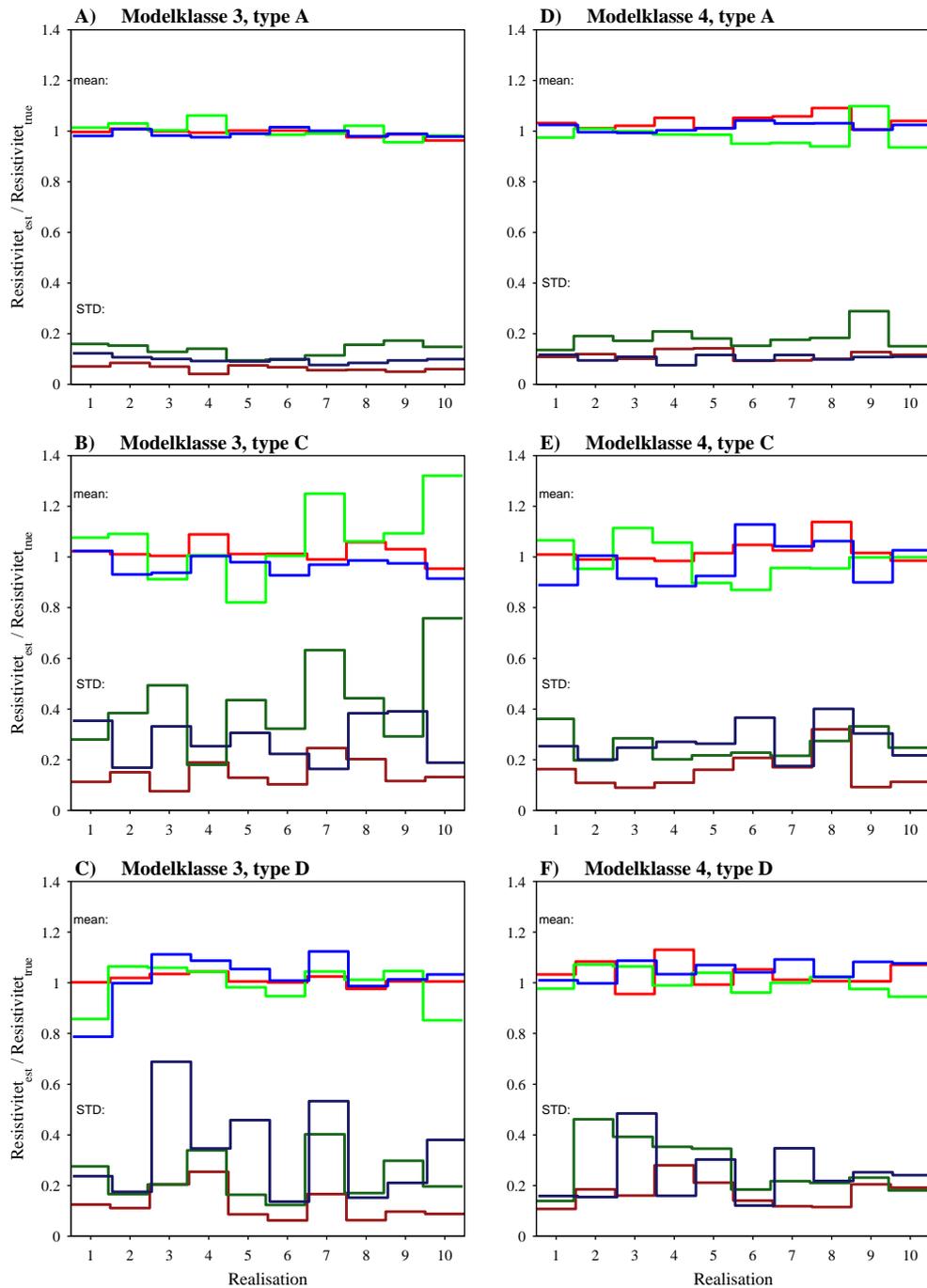
I figur 9.19 og 9.20 vises resultaterne for modelklasserne 3–6. Middelforholdet og standardafvigelsen for de fire modelklasser inden for hver type er ikke væsentligt forskellige. LCI-inversionen er altså i stand til at opløse modelsektioner indeholdende maksimums- og minimumsmodeller (modelklasse 3 og 4) lige så godt som modelsektioner, der primært består af dobbeltopstigende og dobbeltnedstigende modeller (modelklasse 5 og 6). Endnu et fælles træk ved de fire modelklasser er, at middelmådsstanden i det første interval estimeres bedst. Som for den geologiske lertykkelse opnås også her de bedste



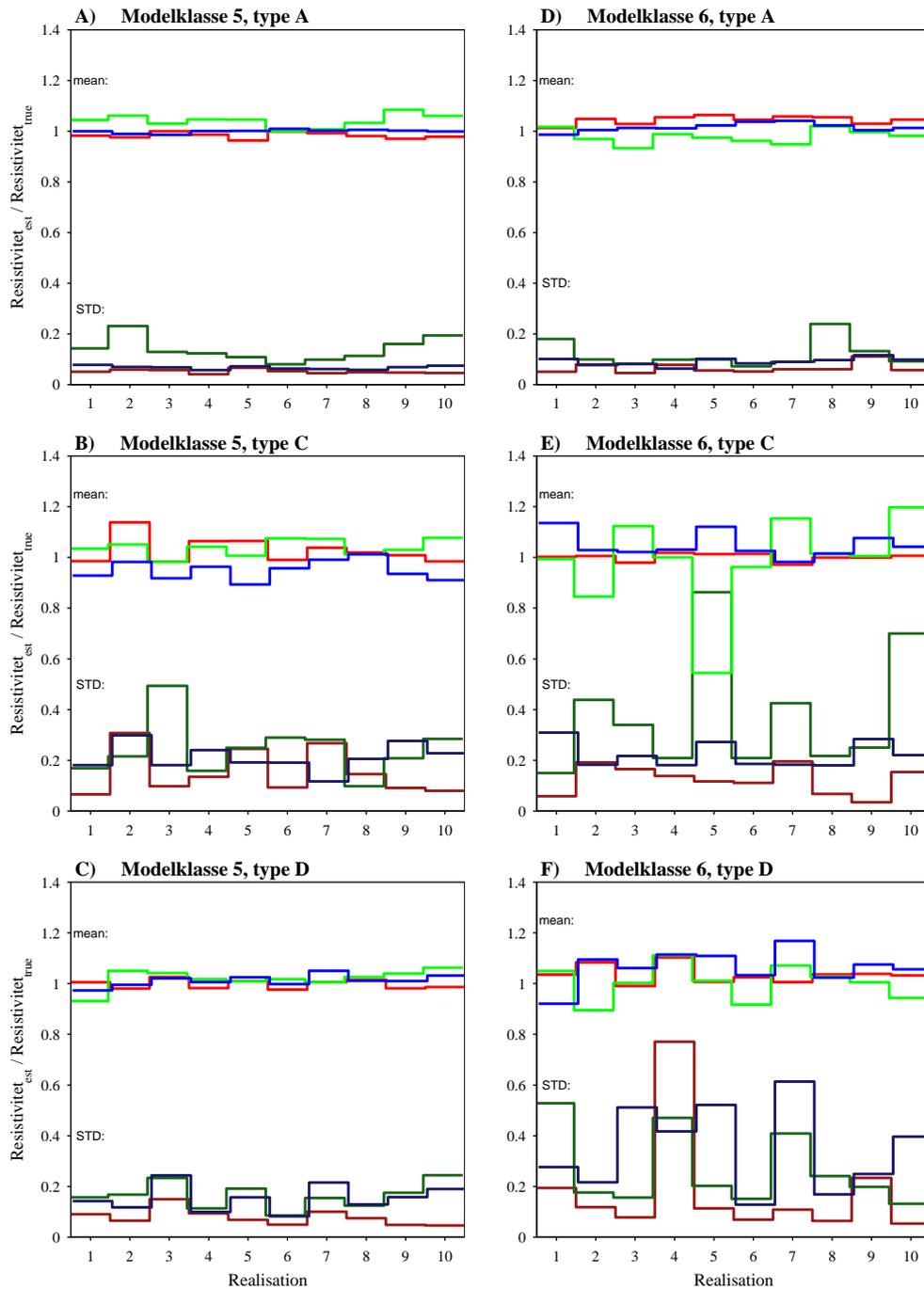
Figur 9.18: Kurverne øverst i hvert plotvindue angiver middelværdien på forholdet mellem den sande middelmåstand og den estimerede for de 200 sonderinger i hver realisation. \square For intervallet 0–5 meter. \square For intervallet 5–15 meter. \square For intervallet 15–30 meter. Nederste kurveskare angiver den tilhørende standardafvigelse på middelværdien.

estimerer og de mindste estimeringsfejl for type A sektionerne og de største for type C sektionerne. Sammenlignes modelklasse 5 og 6 ses det (specielt i plot C og D figur 9.20), at modelklasse 5 fremstår med lidt bedre estimerer. Dette skyldes, at den dybereliggende del af en modelsektion opløses dårligere end den øvre del. Når den dybereliggende del indeholder lave resistiviteter, vil der være relativt mere information om dette lag end i situationen med højresistivt bundlag.

I plot E figur 9.20 ses et voldsomt udsving i middelforholdet og standardafvigelsen for realisation nummer 5 for intervallet 5–15 meter. Betragter man inversionsresultatet for denne realisation, fremstår den visuelt ikke dårligere end de øvrige realisationer fra denne modelklasse og type. Grunden til det



Figur 9.19: Kurverne øverst i hvert plotvindue angiver middelværdien på forholdet mellem den sande middelmåling og den estimerede for de 200 sonderinger i hver realisation. \square For intervallet 1–5 meter. \square For intervallet 5–15 meter. \square For intervallet 15–30 meter. Nederste kurver angiver den tilhørende standardafvigelse på middelforhold.



Figur 9.20: Kurverne øverst i hvert plotvindue angiver middelværdien på forholdet mellem den sande middelmotstand og den estimerede for de 200 sonderinger i hver realisation. \square For intervallet 1–5 meter. \square For intervallet 5–15 meter. \square For intervallet 15–30 meter. Nederste kurveskare angiver den tilhørende standardafvigelse på middelforhold.

dårlige estimat skyldes primært, at laggrænsen mellem andet og tredje lag ikke estimeres særlig godt i nogle områder i sektionen. I disse områder sammenlignes tredjelags høje resistivitet med andets lags lave resistivitet. Disse områder bidrager således relativt meget til det samlede forhold.

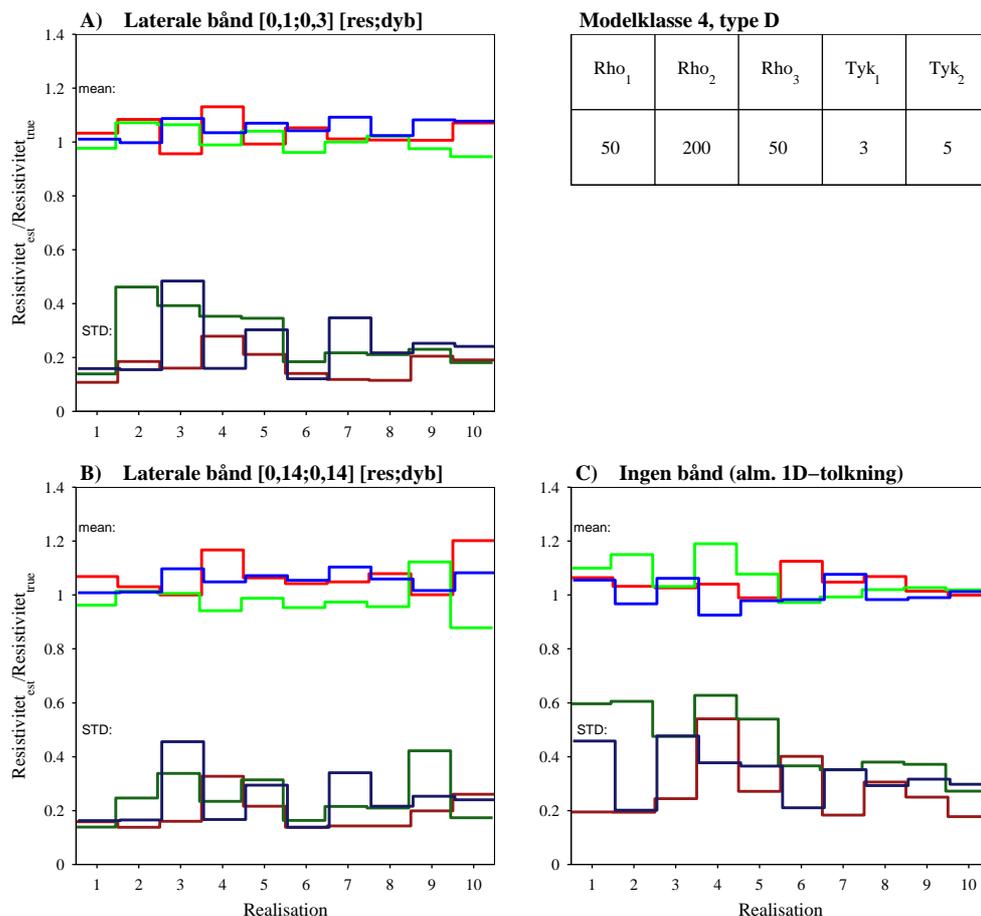
I appendix A figur A.1–A.2 ses resultaterne vedrørende middelkonduktiviteter, præsenteret på samme måde som i figurene 9.18–9.20. Ved beregning af middelkonduktiviteterne nedtones som omtalt de høje resistiviteter. De kraftige udsving for realisation 5 i figur 9.20 er da også forsvundet når, middelkonduktiviteter betragtes. Til gengæld der for middelkonduktiviteterne kraftige udsving for andre realisationer og modeltyper. Det er således fornuftigt både at betragte middelmodstandsintervaller og middelkonduktivitetsintervaller.

Som for den geologiske lertykkelse er der for middelmodstandslagene også lavet en sammenligning med inversionresulater, der er inverteret uden laterale bånd og inverteret med det andet sæt laterale bånd på 0,14 for resistiviteter og dybder. Resultaterne af denne sammenligning er præsenteret i figur 9.21.

Resultaterne i plot A og B er næsten identiske. Det er kun for andet middelmodstandslag (\square) hvor de to sæt af laterale bånd medfører en forskel i inversionsresultatet. For inversionsresultaterne uden laterale bånd (figur 9.21) er det specielt standardafvigelsen, der bliver væsentlig større.

Konklusionen på estimeringen af middelmodstandslag er følgende:

- I middel estimeres middelmodstanden korrekt for alle klasser og typer.
- Middelmodstanden i intervallet 0–5 meter estimeres som ventet bedst. Fejlen på middelmodstandsestimater i dette interval er for alle modelklasser og typer $<0,2$ for de enkelte observationer.
- Den største lighed mellem forwardsektion og inversionsresultat opnås som ventet for type A sektioner med estimeringsfejl $<0,2$ for alle tre intervaller. For type B og C er estimeringsfejlen større og ca. 0,5 for middelmodstanden i 5–15 og 15–30 meter.
- Når der betragtes et større lateralt interval, falder fejlen på estimatet. Dog ikke med kvadratroden af antallet af observationer, idet sonderingerne ikke er uafhængige, men med en faktor, der mindre end dette.
- Modelklassen – det vil sige, om en sektion primært består af maksimums- og minimumsmodeller eller opstigende- og nedstigende modeller, er ikke afgørende for, hvor succesfuld LCI-inversionen er.
- Man kan med fordel studere både middelmodstands- og middelkonduktivitetskort, idet de vægter de høje og lave resistiviteter forskelligt.

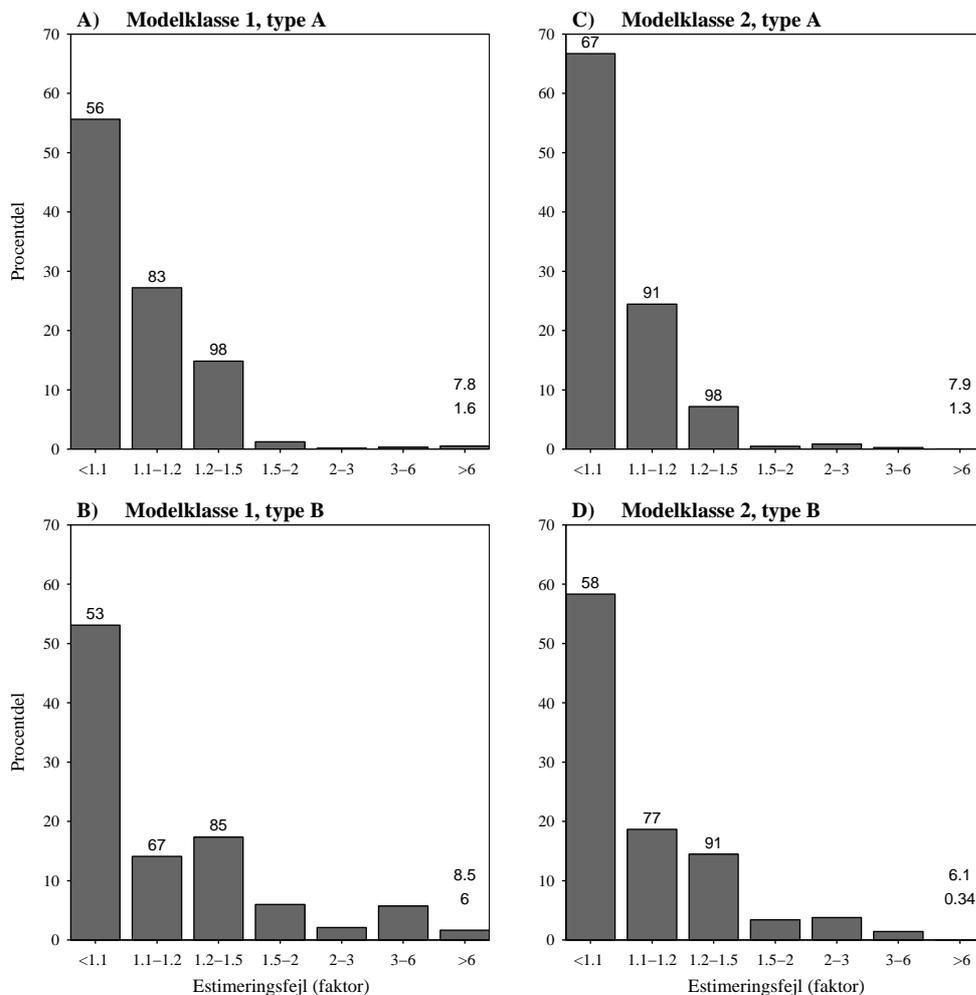


Figur 9.21: Øverste kurver angiver middelværdien på forholdet i hver realisation. \square For intervaller 0–5 meter. \square For intervaller 5–15 meter. \square For intervaller 15–30 meter. Nederste kurveskare angiver den tilhørende standardafvigelse på middelværdien. A: Inverteret med laterale bånd på resistiviteter og dybder på hhv. 0,3 og 0,1. B: Inverteret med laterale bånd på resistiviteter og dybder på 0,14. C: Inverteret uden laterale bånd.

- Styrken af de laterale sammenbindinger er ikke kritisk. De to testede sæt af laterale bånd resulterer i stort set lige succesfulde estimater af middelmotstanden.
- LCI-inversionsresultaterne er klart bedre end modelestimaterne fra inversionen uden laterale sammenbindinger.

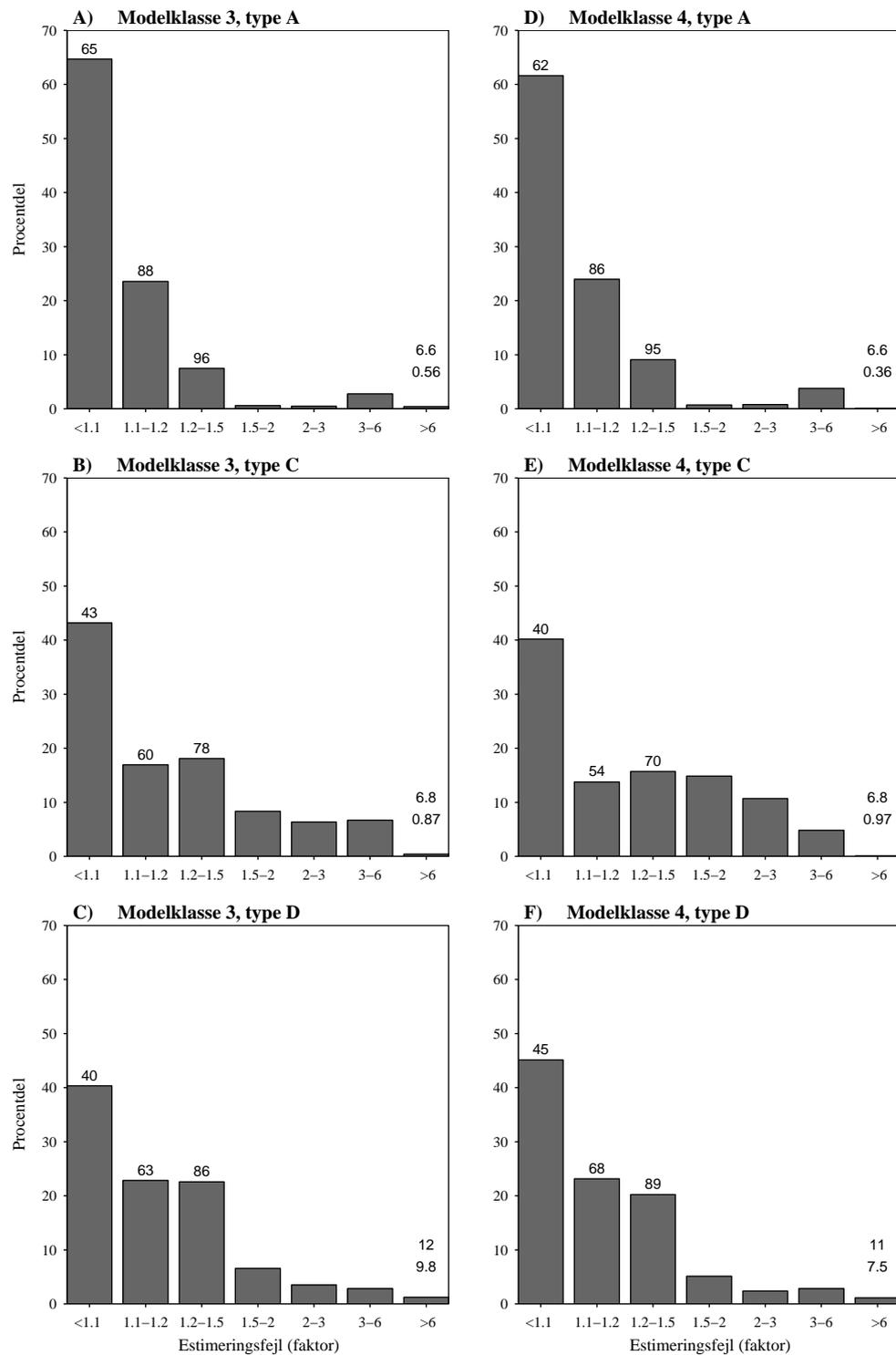
9.3.4 Resistivitetssammenligning

Som omtalt bliver resultaterne af resistivitetssammenligningerne præsenteret, som hvor stor en procentdel af sektionen, der estimeres med en given fejl. I figur 9.22 ses resultaterne fra resistivitetssammenligningerne for mo-

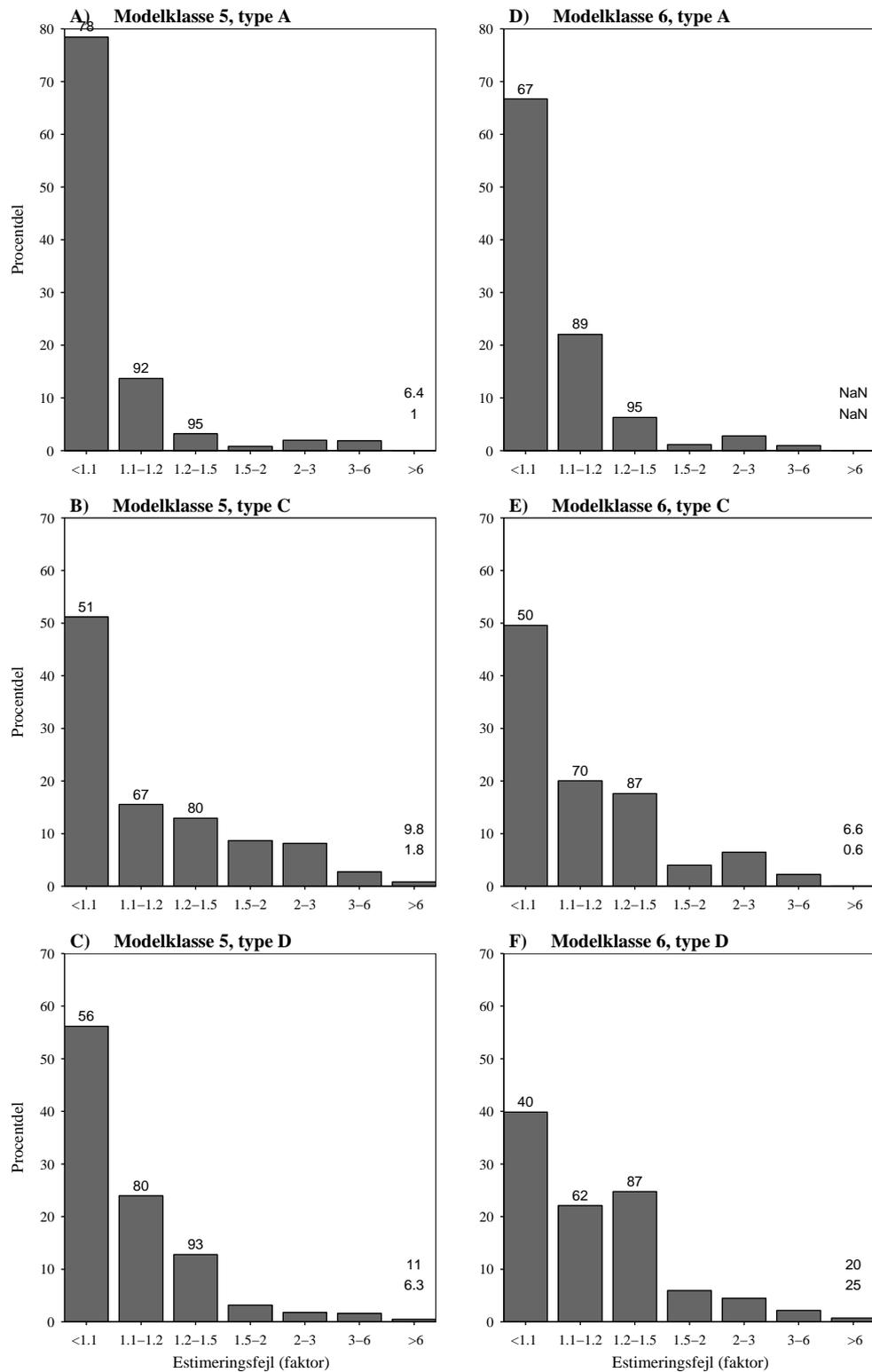


Figur 9.22: Procentdel af modelsektionsresistiviteten der er estimeret med en given fejl. Estimeringsfejlen er en gange/dividere fejl. Tallene over de tre første søjler angiver den kumulative procentdel.

delklasse 1 og 2 (2-lagsmodellerne). Resultaterne i hvert plotvindue er for den samlede fordeling for alle ti realisationer i en modelklasse og type. Estimeringsfejlen på de enkelte celler er inddelt i 7 intervaller. Tallet ved de tre første søjler angiver den kumulative procentdel, mens de to tal ved det sidste interval (>6) angiver henholdsvis middelværdi og standardafvigelse for dette interval. For modelklasse 1 type A (plot A) vil det for eksempel sige, at 56% af sektionen estimeres bedre end en gange/dividere størrelse på 1,1 og 83%



Figur 9.23: Procentdel af modelsektionsresistiviteten der er estimeret med en given fejl. Tallene over de tre første søjler angiver den kumulative procentdel.



Figur 9.24: Procentdel af modelsektionsresistiviteten der er estimeret med en given fejl. Tallene over de tre første søjler angiver den kumulative procentdel.

med en estimeringsfejl mindre 1.2.

For modelklasse 1 og 2 type A estimeres resistiviteterne i hele sektionen overordentlig godt. Cirka 85% af modelsektionen estimeres med en fejl $<1,2$ og ca. 100% med en fejl $<1,5$. For type B er estimeringsfejlen lidt større, men henholdsvis 85 og 90% af sektionen estimeres med en fejl $<1,5$.

I figur 9.23 og 9.24 vises resultaterne for modelklasse 3–6 (3-lagsmodellerne). Som for de to andre sammenligningskriterier opnås de bedste modelestimerer for type A sektionerne. For type A sektionerne estimeres cirka 86% af sektionen med en fejl $<1,2$ og hele 95% med en fejl $<1,5$. Estimeringsfejlen for disse sektioner er faktisk sammenlignelige med 2-lagssektioner (modelklasse 1 og 2). Resultaterne for type C og D sektionerne er ikke væsentligt forskellige, dog estimeres type C modellerne en anelse bedre. For type C sektionerne gælder det, at ca. 80% af sektionen estimeres med en fejl $<1,5$. Mens for D typerne er det ca. 85–90% af sektionen, der estimeres med en fejl $<1,5$.

Sammenlignes resultaterne for de fire modelklasser, er der ikke væsentlige forskelle. LCI-inversionen opløser således sektioner primært indeholdende maksimums- og minimumsmodeller samt dobbelttopstigende- og dobbeltnedstigende modeller lige godt.

I plot F i figur 9.24 ses de omtalte effekter, når laggrænser estimeres forkert, med store resistivitetsforskelle til følge for enkelte celler. Her er midelværdien på de estimeringsfejl, der indgår i intervallet $[> 6]$, helt oppe på 20 og med en standardafvigelse på 25. Det vil sige, at der er mange af observationerne i dette interval, hvor estimeringsfejlen er på 40–50.

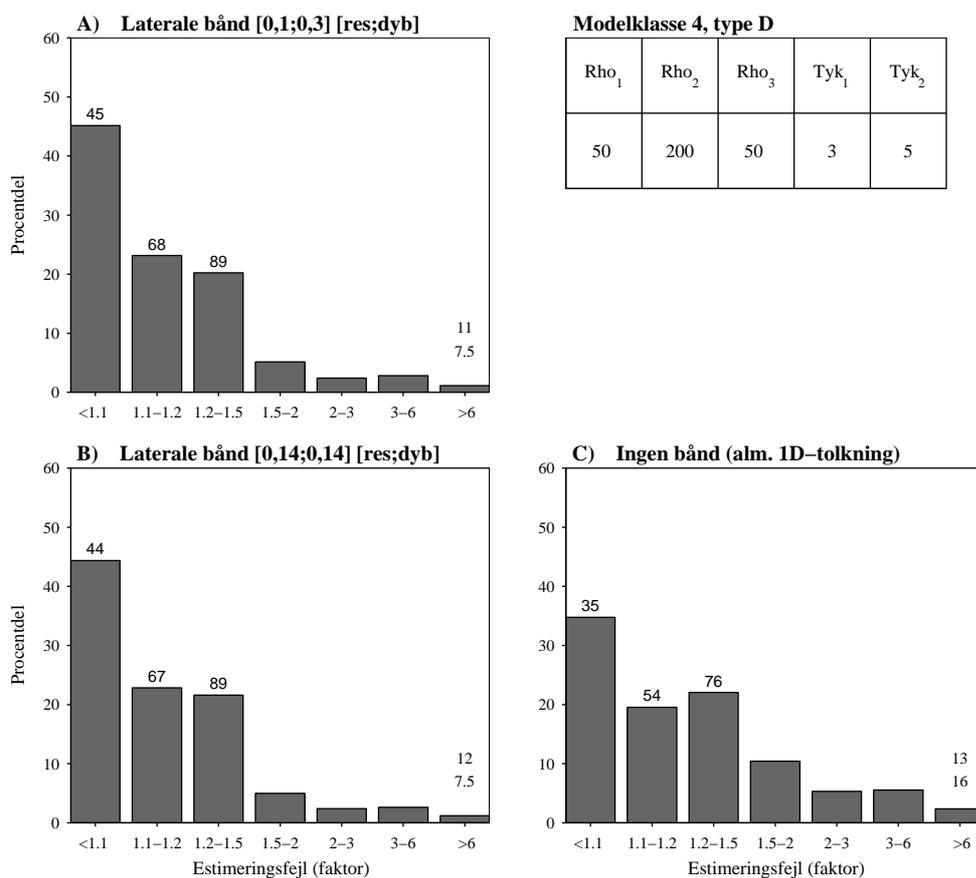
Også i dette afsnit er der lavet en sammenligning af resultaterne fra inversion med det andet sæt af laterale bånd og inversion uden laterale bånd. Dette er gjort for modelklasse 4 type D. Sammenligninger af resultaterne fra de tre inversionsmåder er vist i figur 9.25. Fordelingerne for estimeringsfejlene fra inversion med de to sæt af laterale bånd (plot A og B) er næsten identiske. Størrelsen på de laterale bånd er således ikke kritisk. For inversionsresultaterne uden laterale bånd (plot C) er det 76% sektionen, der estimeres med en fejl $<1,5$, mens for LCI-inversionsresultaterne er det 89% af sektionen, der estimeres med en fejl $<1,5$. LCI-inversionen bevirker altså, at resistiviteten som helhed i en sektion bliver estimeret bedre.

Konklusion på, hvor godt LCI-inversionsmetoden estimerer resistiviteten i en sektion, er følgende:

- Hvis geologien varierer langsomt som i type A modelsektioner estimeres resistiviteten i ca. 85% af en sektion med en fejl $<1,2$ og hele 95% med en fejl mindre en $<1,5$ uafhængig af, om det er 2 eller 3-lagsmodelsektioner.
- LCI-inversion er bedre til at håndtere sektioner med kraftige variationer i resistiviteter (type D) end sektioner med kraftigt varierende

laggrænser (type C). 85–90% af sektionen estimeres med en fejl $<1,5$ for type D mod ca. 80% for type C.

- LCI-inversionen opløser modelsektioner primært indeholdende maksimums- og minimumsmodeller, dobbelttopstigende- og dobbelnedstigende modeller lige godt.
- Størrelsen af de laterale bånd er ikke kritisk for inversionsresultatet.
- LCI-inversionsmetoden estimerer de sande resistiviteter bedre end 1D-inversion uden laterale bånd.



Figur 9.25: Procentdel af modelsektionsresistiviteten der er estimeret med en given fejl. A: Inverteret med laterale bånd på resistiviteter og dybder på hhv. 0,3 og 0,1. B: Inverteret med laterale bånd på resistiviteter og dybder på 0,14. C: Inverteret uden laterale bånd.

10 Konklusion

Målet med dette speciale har dels været at opnå forståelse for LCI-inversionsmetodens virkemåde, dels at belyse hvor gode modelestimaterne fra LCI-inversionerne er.

Studiet af resolutions-matricerne har vist, at samspillet mellem data og de laterale bånd er en kompliceret sag. Det har således ikke været muligt på en simpel måde at vise, i hvilken grad bånd og data har indflydelse på bestemmelsen af de enkelte modelparametre. Dette skyldes for det første, at alle modelparametre i en modelsektion kan påvirke hinanden gennem de laterale bånd, dels at DC-problemet er en non-lineært problem. Studier af resolutions-matricerne har dog vist, at når data opløser modeller godt, falder de laterale båndes indflydelse i inversionsfasen, hvilket er et ønskeligt forhold. Endvidere har studierne af resolutions-matricerne vist, at de laterale bånd er korrekt implementerede i inversionskoden.

Testen af variansanalysen fra EM1DINV for inversionsituationen med laterale bånd (den koblede analyse) er faldet positivt ud. Det er således blevet fastslået, at variansanalysen er korrekt ud fra de antagne forudsætninger.

Ved en række test blev det fastslået, at laterale bånd på dybder er at foretrække frem for bånd på tykkelser, samt at en kombination af laterale bånd på resistiviteter og dybder er mest optimalt. Med en sonderingstæthed på 5 meter er 0,1–0,3¹ fornuftige størrelser af de laterale bånd. De to sæt af laterale bånd på henholdsvis [0,1 0,3] og [0,14 0,14] [resistiviteter dybder], der blev testet på en lang række modelsektioner, har vist sig at resultere i lige succesfulde inversionsresultater. Det kan således udledes, at størrelsen af de laterale bånd ikke er kritisk for inversionsresultatet.

Ved test på modelsektioner med forskellige laghældninger har det vist sig, at hverken midling af data eller de laterale bånd har bevirket begrænsninger i, hvor stejl en laghældning, der kan estimeres. Det er derimod den éndimensionale tolkningsmodel, der er den begrænsende faktor. Den maksimale laghældning, der kan estimeres, er på ca. 10%, og denne grænse er stort set modeluafhængig. Inversion af modelsektionen indeholdende laghældninger stejlere end 10% resulterer dog i acceptable modelestimater. I disse tilfælde udglattes laghældningen dog uden væsentlig fejlestimering af resistiviteten. Den begrænsende faktor for laterale resistivitetsvariationer i modelestimatet er også den éndimensionale tolkningsmodel. Som for laghældningerne udglattes kraftige variationer dog uden væsentlige fejlestimeringer af lagtykkelser.

De viste LCI-inverterede stokastiske modelsektioner fra de forskellige modelklasser og typer har demonstreret, at LCI-inversion resulterer i bløde realistiske modelsektioner. Modelsektioner præsenterer således information fra data på anvendelige måder til for eksempel brug i en hydrogeologisk model.

¹Svarende til en $\exp^{0,1}$ gange/dividere størrelse på modelparametrene

Resultaterne fra de tre analysekriterier har fastslået, at LCI-inversion fremkommer med bedre modelestimater i forhold til inversion uden laterale bånd. Estimeringsfejlen bliver generelt mindre – dog afhængig af resistivitetsfordelingens karakter. I tråd med dette er usikkerhederne fra variansanalysen mindre ved LCI-inversionen. Resultaterne fra de tre analyser har vist, at selv for modelsektioner indeholdende relativt kraftige laterale variationer i resistivitet og lagtykkelser, fremkommer LCI-inversionsmetoden med fornuftige modelestimater med den forventede glatning.

Estimeringsfejlen på den geologiske lertykkelse afhænger i høj grad af de absolutte resistivitetsværdier. For modelsektioner, hvor lertykkelsesbidraget kommer fra lag, der ligger tæt på bidragsgrænsen til den geologiske lertykkelse, er estimeringsfejlen væsentligt større end for modelsektioner med vel opløste lavmodstandslag. Det bør derfor overvejes at redefinere den geologiske lertykkelse så overgangszoner for, hvornår en resistivitet bidrager til den geologiske lertykkelse, gøres større.

For estimering af middelmodstandslag har resultaterne illustreret, at i middel estimeres middelmodstanden i de tre intervaller korrekt. Fejlen på estimeringen er som ventet mindst for middelmodstanden i intervallet 0–5 med en estimeringsfejl $<0,2$ (\approx faktor 1.2) uafhængig af modeltype. For de to dybere liggende intervaller er estimeringsfejlen mere modelafhængig, men er generelt ikke større end ca. 0,5 (\approx faktor 1.5).

Resultaterne fra resistivitetssammenligningen mellem forwardsektion og inversionsresultat har vist, hvor godt en modelsektion i helhed estimeres, og således hvor pålidelige modelestimater af PACES-data ved LCI-inversion er. Hvis geologien varierer relativt langsomt, som i type A modelsektioner, estimeres resistiviteten i ca. 85% af en sektion med en fejl $<1,2$ og hele 95% med en fejl $<1,5$ uafhængig af, om det er 2- eller 3-lagsmodelsektioner.

Der er i specialearbejdet således belyst en række forhold omkring LCI-inversionsmetoden, og der er foretaget en række optimeringer af metoden. Det er ligeledes belyst, hvor stor den gennemsnitlige fejl på modelestimaterne er, når det gælder inversion af PACES-data. Inversionsmetoden er også egnet for tolkning af andre typer geofysiske data for eksempel PATEM-data. En anden interessant måde at benytte LCI-inversionsmetoden på kunne være ved at indføre laterale bånd, ikke kun til modelparametre i samme profiler, men også til modelparametre i naboprofiler, og hermed invertere et fladeområde i et inversionsforløb. Dette medfører dog behov for udvikling af en rational måde at opstykke inversionsproblemet på. De 1 km. lange sektioner i dette speciale er inverteret som en samlet sektion. Taget i betragtning, at der er foretaget en 1D-inversion, er regnetiderne relativt lange. Som for beregningen af forwardresponser kan man også med fordel opstykke inversionsproblemet i flere og mindre problemer.

Et andet område, man med fordel kan undersøge med henblik på at forbedre LCI-metoden, er bølgelængden af de geologiske variationer, som LCI-

metoden kan estimere. Dette kunne eventuelt bidrage til mere optimale indstillinger af de laterale bånd.

Litteratur

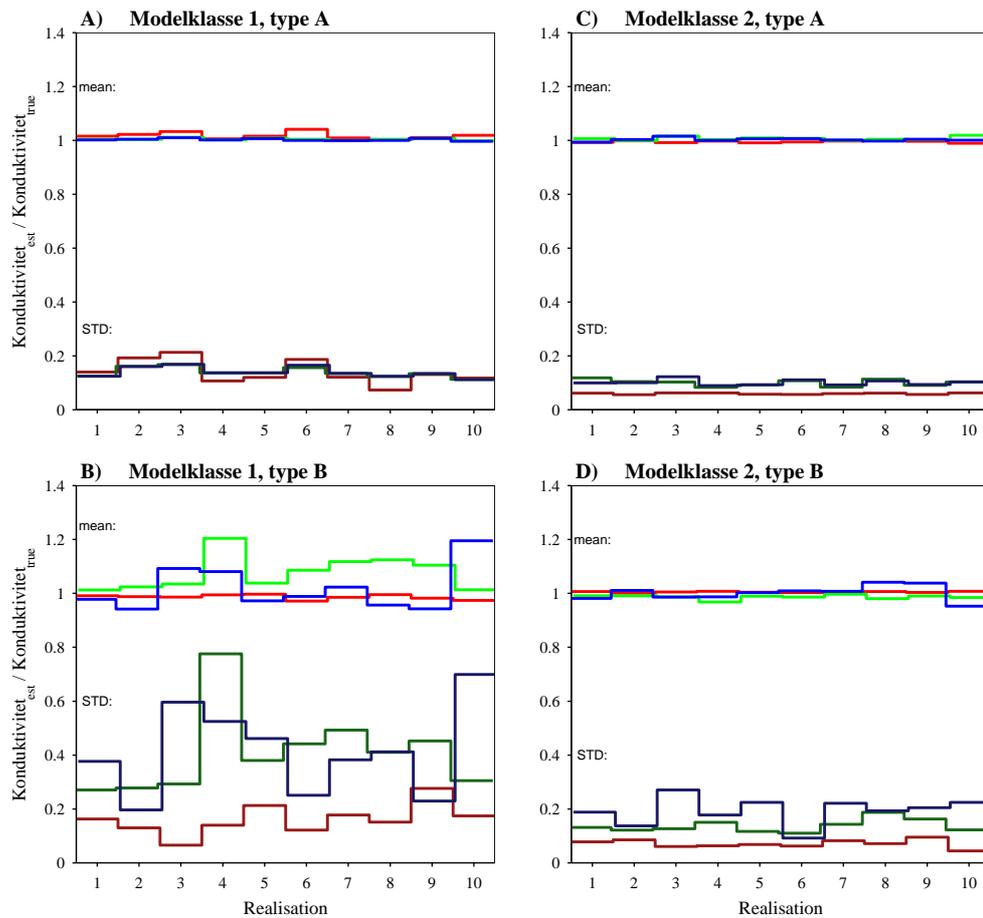
- Auken, E., M. S. Breiner, K. Sørensen, and P. Thomsen (2000). *Geofysik - Grundvandskortlægning, kursusnoter*.
- Christensen, N. B. (1987). *Geofysik og råstofkortlægning* (1991 2 ed.). Miljøministeriet, Skov og Naturstyrelsen.
- Christensen, N. B. (1994). The direct current geoelectrical problem. Lecture Notes.
- Coggon, J. H. (1971). Electromagnetic and electrical modelling by the finite-element method. *Geophysisc* 36, 132–155.
- Coggon, J. H. (1985). Electromagnetic and electrical modelling by the finite-element method. *Geophysics* 50(11), 2002–2025.
- Dey, A. and H. F. Morrison (1979). Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting* 27, 106–136.
- Effersø, F., E. Auken, and K. I. Sørensen (1999). Inversion of band-limited TEM responses. *Geophysical Prospecting* 47, 551–564.
- Ellis, D. V. (1987). *Well logging for Earth Scientists*. Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- Farquharson, C. G. and D. W. Oldenburg (1993). Inversion of time-domain electromagnetic data for a horizontally layered earth. *Geophys.J.Int.* 114, 433–442.
- Jacobsen, B. H. (1993). Practical methods of a covariance specification for geophysical inversion. Proceedings of the Interdisciplinary Inversion Workshop 2, Copenhagen 1993.
- Jacobsen, B. H. (1997). *Introduktion til Geofysiske Metoder*, Chapter 3. Elektriske metoder. Geofysisk Afdeling, Geologisk Institut, Aarhus Universitet.
- Jacobsen, B. H. (2000). *Geophysical Inverse Modelling*. Lecture notes.
- Johansen, H. K. and K. I. Sørensen (1979). Fast hankel transforms. *Geophysical Prospecting* 27, 876–901.
- Lee, T. (1975). An integral equation and its solution for some two and three-dimensional problems in resistivity and induced polarization. *Geophysics Journal* 42, 81–95.
- Loke, M. H. and R. D. Barker (1995). Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections. *Geophysics* 60(1682-1690), 6.
- McGillivray, P. R. (1992). *Forward modeling and inversion of Dc resistivity and MMR data*. Phd thesis, The University of British Columbia, Vancouver, Canada.

- Menke, W. (1989). *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, Volume 45 of *International Geophysic Series*. Academic Press, INC. Revised edition 1989.
- Møller, I. (1999, May). *Fast 2D inversion of large geoelectrical data sets for near-surface resistivity mapping*. Ph.d afhandling, Geofysisk Afdeling, Geologisk Institut, Aarhus Universitet.
- Mufti, I. R. (1976). Finite-difference resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysics* 41, 62–78.
- Panissod, C., M. Dabas, A. Hesse, A. Jolivet, J. Tabbagh, and A. Tabbagh (1998). Recent developments in shallow-depth electrical and electrostatic prospecting using mobile arrays. *Geophysics* 63(05), 1542–1550.
- Pilkinton, M. and J. P. Todoeschuck (1990). Stochastic inversion for scaling geology. *Geophysic Journal Int.* 102, 205–217.
- Smith, H. T., E. Gasperikova, and E. Morrison (1999). Sharp boundary inversion of 2d magnetotelluric data. *Geophysical Prospecting* 47, 469–486.
- Sørensen, K. and F. P. Pedersen (1992). *Slæbe-geoelektrik*. Miljøministeriet, Skov- og Naturstyrelsen.
- Sørensen, K. I. (1996). Pulled array continuous electrical profiling. *First break* 14(3), 85–90.
- Sørensen, K. I. and F. Effersø (1995). Continuous transient electromagnetic sounding. *1st Meeting of the EEGS European Section, Torino, Italy*, 472–475.
- Ward, S. H. and G. W. Hohmann (1991). *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics* (2 ed.), Volume 1 of *Investigations in Geophysics* no. 3, Chapter 4. SEG. Paperback 1993.

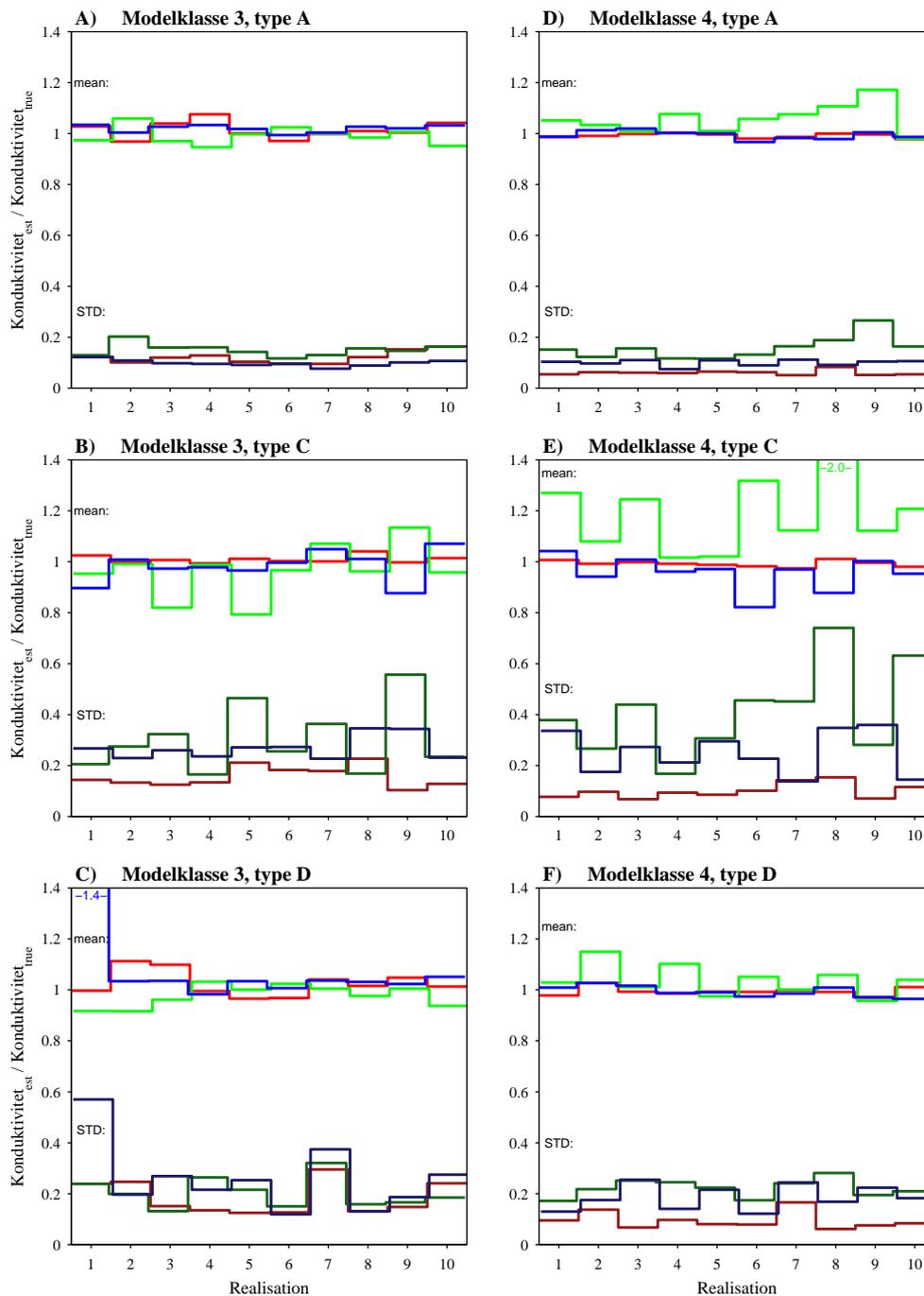
A Estimering af middelkonduktivitetsslag

Det gennemsnitlige forhold mellem den sande- og den estimerede middelkonduktivitet er beregnet på samme måde som for middelmodstanden i afsnit 9.3.3. I det følgende vises resultaterne af sammenligningerne af middelkonduktiviteten fra forwardsektionen med inversionsresultatet for de ti realisationer i hver modelklasse og type. For hver realisation er der tre parametre at sammenligne. De øverste tre kurver i for eksempel hvert plotvindue i figur A.1–A.4 angiver middelforholdene for de ti realisationer. Den \square -kurve for intervaller 0–5 meter, den \square for intervallet 5–15 meter og \square for intervallet 15–20 meter. Den tilhørende standardafvigelse på middelforholdet er angivet nederst i plotvinduerne med mørkere farver.

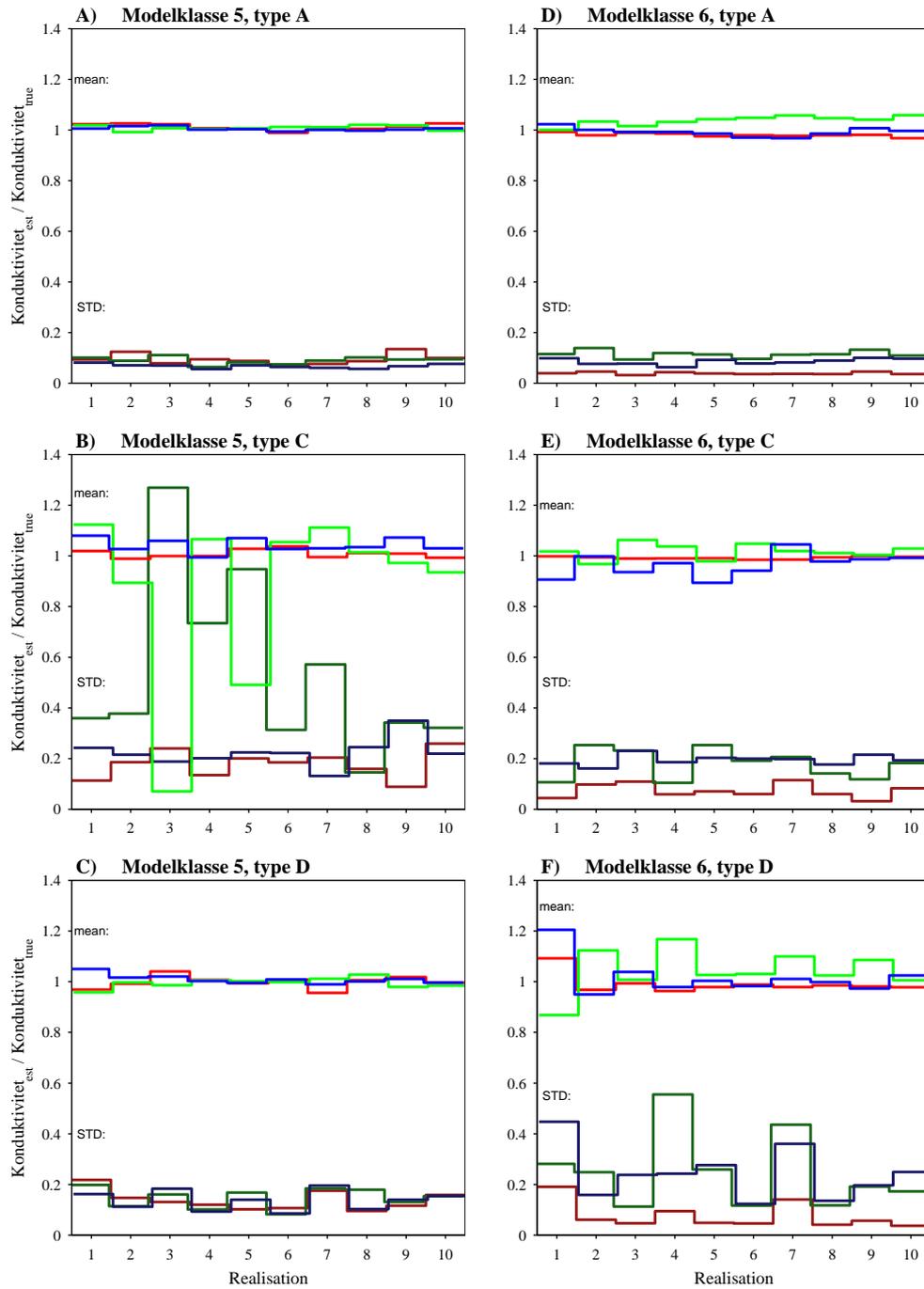
Som det fremgår af resultaterne er de ikke væsentligt forskellige fra resultaterne vedrørende middelmodstandslag. Dog ses det, at estimationsfejlene generelt er lidt mindre. Endvidere viser resultaterne i figur A.4, at LCI-inversionsmetoden medfører en klar forbedring i forhold til inversion uden laterale bånd.



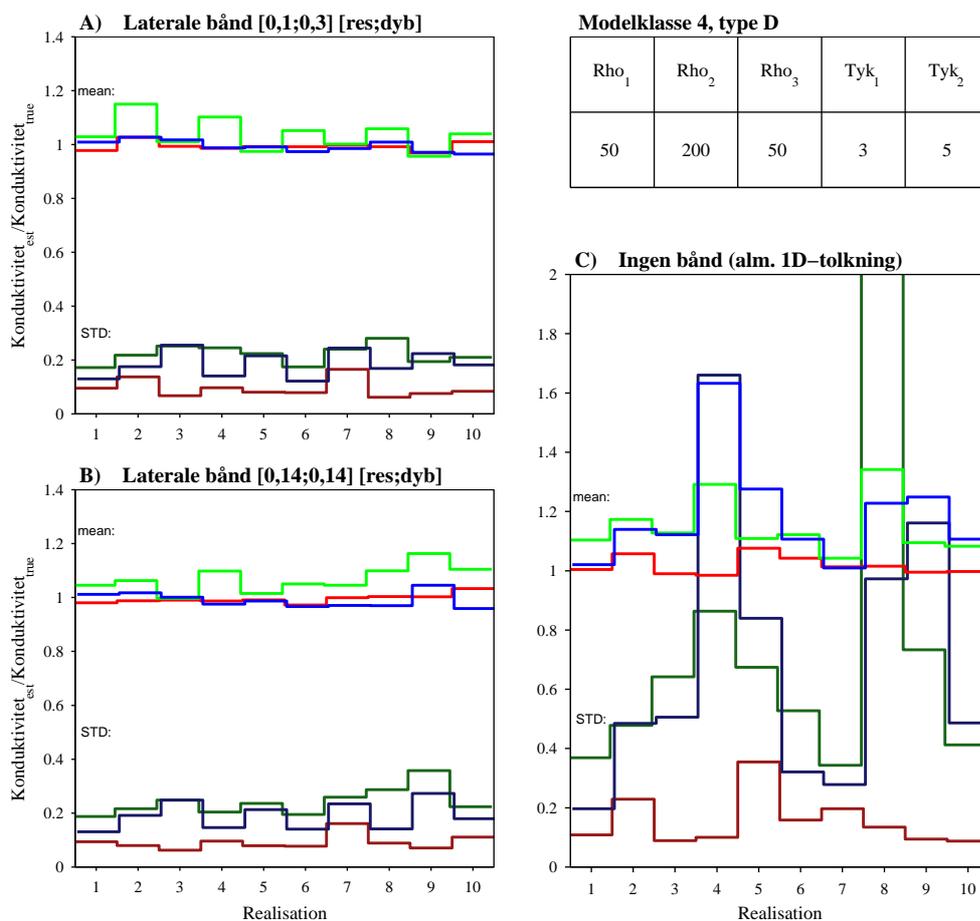
Figur A.1: Kurverne øverst i hvert plot-vindue angiver middelværdien på forholdet mellem den sande middelkonduktivitet og den estimerede for de 200 sonderinger i hver realisation. \square for intervaller 0-5 meter. \square for intervaller 5-15 meter. \square for intervaller 15-30. Nederste kurveskare angiver den tilhørende standardafvigelse på middelværdien. Titlen på plotvinduerne angiver modelklasse og type.



Figur A.2: Kurverne øverst i hvert plot-vindue angiver middelværdien på forholdet mellem den sande middelkonduktivitet og den estimerede for de 200 sonderinger i hver realisation. \square for intervaller 0-5 meter. \square for intervaller 5-15 meter. \square for intervaller 15-30. Nederste kurveskare angiver den tilhørende standardafvigelse på middelværdien. Titlen på plotvinduerne angiver modelklasse og type.



Figur A.3: Kurverne øverst i hvert plotvindue angiver middelværdien på forholdet mellem den sande middalkonduktivitet og den estimerede for de 200 sonderinger i hver realisation. \square for intervaller 0-5 meter. \square for intervaller 5-15 meter. \square for intervaller 15-30. Nederste kurveskare angiver den tilhørende standardafvigelse på middelværdien. Titlen på plot-vinduerne angiver modelklasse og type.



Figur A.4: Øverste kurver angiver middelværdien på forholdet i hver realisation. \square for intervaller 0–5 meter. \square for intervaller 5–15 meter. \square for intervaller 15–30 meter. Nederste kurveskare angiver den tilhørende standardafvigelse på middelværdien. A: Inverteret med laterale bånd på [0,3;0,1] [resistiviteter;dybder]. B: Inverteret med laterale bånd på [0,14;0,14] [resistiviteter;dybder]. C: Inverteret uden laterale bånd.